Глава 13

АЛГЕБРА ЛОГИКИ И РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

13.1. Общие сведения об алгебре логики

Высказыванием называют повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно. Высказывания также называют **суждениями**. В более широком смысле под высказыванием понимается выражение не обязательно на разговорном языке, например на алгоритмическом.

«Река Нева вытекает из Ладожского озера» — истинное высказывание, «два больше трех» — ложное. Это элементарные высказывания, простые суждения. Первое высказывание всегда истинное, второе всегда ложное, то есть эти высказывания — константы.

Об истинности или ложности предложения X>5 сказать ничего нельзя, пока неизвестно значение переменной X. Предложения «Дождь идет», «Светит Солнце», X>5 — могут быть истинными или ложными в зависимости от конкретной ситуации, места и времени. Эти предложения можно рассматривать как логические переменные.

Высказывания обозначают латинскими буквами A, B, C,... и рассматривают как величины, принимающие значения И (истина) и Л (ложь).

Логикой называют науку о способах доказательств, о способах рассуждений, которые от истинных суждений (посылок) приводят к истинным суждениям (следствиям). Алгеброй логики называют алгебру, применяемую в разделе логики Исчисление высказываний. В этом разделе из простых высказываний с помощью логических операций конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация и эквивалентность строятся сложные высказывания. Здесь же решаются вопросы истинности этих сложных высказываний путем анализа на истинность входящих в них простых высказываний.

Основоположником формальной логики считают древнегреческого ученого, философа Аристотеля (384–322 гг. до н. э.). Если в «Диалогах» Платона (427–347 гг. до н. э.) логика просматривалась в содержательных рассуждениях Сократа (ок. 469–399 гг. до н. э.), то Аристотель вместо конкретных высказываний вводит переменные, отделяет логические правила от содержания, делает первый шаг к математически строгому, формализованному подходу в изучении логики.

Уже у Аристотеля была идея составлять более сложные высказывания из простых высказываний. Дальнейшее развитие эта идея получила в трудах немецкого математика, физика, философа Лейбница (1646–1716 гг.). Он работал над приданием аристотелевой логике алгебраической формы. Но лишь в середине прошлого века эта идея в работах английского математика и логика Джорджа Буля (1815–1864 гг.) воплотилась в законченную форму. Он построил алгебру на такой системе аксиом, которая описывает свойства высказываний и назвал свою алгебру алгеброй логики.

13.2. Логические операции над высказываниями

Базис современной алгебры логики составляют операции конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация и эквивалентность. Запись этих операций на разговорном языке, в алгебре логики, в булевой алгебре и на языке программирования показана в табл. 13.1.

В некоторых случаях в базис алгебры логики добавляют функцию неравнозначность (сумма по модулю 2, инверсия эквивалентности — A XOR B). В таблице истинности (табл. 13.2) собраны коды функций алгебры логики.

Отметим, что при преобразованиях формул логических функций и особенно при их моделировании на компьютере, как правило, пользуются более удобным двоичным алфавитом, то есть вместо Л используют 0 (ноль), вместо И — 1 (единица).

Таблица функций алгебры логики — Таблица 13.1

Функции (операции)	Разговорный язык	Алгебра логики	Булева алгебра	Бейсик
Коньюнкция	А и В	AB, $A \wedge B$	AB	A AND B
Дизъюнкция	А или В	$A \vee B$	$A \vee B$	A OR B
Инверсия	не А	$\bar{A}$ или $\neg A$	$\bar{A}$	NOT A
Импликация	если А, то В	$A \rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$	A IMP B
Эквивалентность (равнозначность)	А тогда и только тогда, когда В	$A \leftrightarrow B$	$AB \vee \overline{AB}$	A EQV B

Таблица истинности — Таблица 13.2

X Y	не X	XY	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$Y \rightarrow X$	$X \leftrightarrow Y$
Л Л	И	Л	Л	И	И	И
Л И	И	Л	И	И	Л	Л
И Л	Л	Л	И	Л	И	Л
И И	Л	И	И	И	И	И

Рассмотрим функции алгебры логики применительно к конкретным высказываниям. Обозначим высказывания «Дождь идет» буквой D, «На небе тучи» буквой T. Можно записать: D = «Дождь идет» и T = «На небе тучи». Включим в рассмотрение и функцию неравнозначность (сумму по модулю 2).

Конъюнкция (логическое умножение). Сложное высказывание «**D и T**» понимается в том смысле, что «Дождь идет и на небе тучи». Обозначим это высказывание буквой A. Используя знаки операций булевой алгебры, можно записать: A = D·T. На языке программирования это запишется так: A = D AND T.

Дизъюнкция (логическое сложение). Сложное высказывание «**D или T**» читается так: «Дождь идет или на небе тучи». Обозначим его буквой B. Можно записать: B = D∨T и B = D OR T.

Инверсия (отрицание). Одноместную операцию отрицание можно применить как к простому, так и сложному высказыванию. Высказывание «**не** D» читается «**Не верно**, что дождь идет» или «Дождь **не** идет». Это записывается формулами так: $\bar{D}$ и NOT D.

Если A = D · T, то под высказыванием «не A» понимается следующее: «Не **верно**, что дождь идет и на небе тучи». Соответственно их можно записать так: $A = \overline{DT}$ или NOT A = NOT (D AND T) = NOT D OR NOT T. К последнему выражению приводит применение правила де Моргана (инверсия конъюнкции равна дизъюнкции инверсий).

Импликация. Операция импликация эквивалентна выражению на разговорном языке «Если D, то T», где D и T некоторые высказывания. Допустим, что D и T — это те же введенные выше высказывания: D = «Идет дождь» и T = «На небе тучи». Рассмотрим функцию D→T.

Напомним, что, если D = И, то дождь идет, если же D = Л, то дождя нет. Аналогично с тучей на небе. В пятом столбце таблицы истинности записано значение функции импликация на всех наборах значений аргументов. Построчно эту функцию в отношении высказываний D и T можно интерпретировать так:

1-я строка. Л→Л = И.	«Если дождь не идет, то на небе нет тучи» — высказывание истинно;
2-я строка. Л→И = И.	«Если дождь не идет, то на небе тучи» — высказывание истинно;
3-я строка. И→Л = Л.	«Если дождь идет, то на небе нет тучи» — высказывание ложно;
4-я строка. И→И = И.	«Если дождь идет, то на небе тучи» — высказывание истинно.

Некоторые из строк, например, вторая строка, могут вызвать вопросы. Но следует учитывать, что в алгебрах царствует формальный подход. А в алгебре логики, предназначенной для формализации богатого различными нюансами разговорного языка, отразить операциями все смысловые тонкости речи практически невозможно. Расширение базиса алгебры (набора операций) усложняет ее, что нежелательно. Но и принятый базис позволяет находить решения сложных логических задач, которые с помощью содержательных рассуждений, без использования аппарата алгебры логики решать трудно.

Неравнозначность (сумма по модулю 2) — в отношении дождя и тучи может быть записана формулой так: $D \cdot \overline{T} \vee \overline{D} \cdot T$, т.е. «Дождь идет и на небе нет туч или дождя нет и на небе тучи» — или одно, или другое, но не оба. Неравнозначность — инверсия эквивалентности. На языке программирования неравнозначность записывается так: C = D XOR T.

Эквивалентность (равнозначность) — последняя функция базиса алгебры логики. В принятых выше обозначениях (D — дождь, T — туча) эта функция записывается в булевой алгебре, алгебре логики и на языке программирования следующими формулами: $C = D \cdot T \vee \overline{D} \cdot \overline{T}$, $C = D \leftrightarrow T$ и C = D EQV T, т.е. сложное высказывание C истинно в случаях, если простые высказывания D и T оба истинны или оба ложны, что означает «идет дождь и на небе тучи или не идет дождь и нет на небе тучи».

13.3. Формализация высказываний

Естественный язык не поддается полной формализации ввиду неоднозначности слов, выражений, множества трудноуловимых оттенков, передающих эмоциональную сторону высказываний. Поэтому операции в алгебре логики носят собирательный характер в том смысле, что каждая операция формализует некоторое количество тождественных или близких по смыслу выражений разговорной речи. Рассмотрим примеры.

Конъюнкция: «A и B», «как A, так и B», «не только A, но и B», «A вместе с B», «A, несмотря на B», «A, в то время как B» и т.п.

Дизъюнкция: «A или B», «A, или B, или оба» и т.п.

Если встречается связка «либо», например, «A либо B», то это означает «или A, или B, но не оба», «только A или только B», что формализуется формулой $A \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot B$, то есть операцией XOR, которая равна инверсии операции EQV.

Инверсия: «не A», «неверно, что A», «A не имеет места».

Импликация: Следующие выражения записываются формулой A→B: «если A, то B», «B, если A», «когда A, тогда B», «A только, если B», «A достаточно для B», «для A необходимо B», «A только тогда, когда B» и т.п.

Следующие высказывания записываются формулой B→A: «если B, то A», «A, если B», «A тогда, когда B», «для A достаточно B» и т.п.

К импликации приводят выражения, содержащие слова «необходимо» и «достаточно». Например, обозначим буквой A высказывание «пошел дождь», буквой B — «на небе тучи». Высказывание «Чтобы пошел дождь, необходимо наличие на небе туч». Левая часть этого высказывания — посылка, правая — заключение. Формулой оно записывается так: A→B.

Высказывание «Чтобы пошел дождь, достаточно на небе туч» записывается так: B→A. Можно сделать вывод, что необходимые условия записываются в качестве заключения, справа, а достаточные условия записываются в формуле слева, в качестве посылки.

При решении задач полезно помнить запись импликации в булевой алгебре: $A \to B = \overline{A \cdot \overline{B}} = \overline{A} \vee B$, $B \to A = \overline{\overline{A} \cdot B} = A \vee \overline{B}$.

Некоторые выражения разговорного языка по форме напоминают импликацию, а по содержанию требуют запись в виде конъюнкции. Например: «Если Петр любитель ходить по гостям, то Павел домосед». «Если в планиметрии изучают плоские фигуры, то в стереометрии изучают трехмерные геометрические тела».

Неравнозначность: «A или B, но не оба», «A либо B», «либо A, **либо B**», либо не A, либо не B».

Эквивалентность (равнозначность): «A эквивалентно B», «A тогда и только тогда, когда B», «A необходимо и достаточно для B». Напомним, что в булевой алгебре, алгебре логики и на языке программирования, эквивалентность (равнозначность) записывается так: $C = \overline{A} \cdot \overline{B} \vee A \cdot B$, $C = A \leftrightarrow B$, C = A EQV B.

В алгебре логики справедливы все законы и правила преобразования формул булевой алгебры. Включение в базис алгебры логики функций импликация и эквивалентность добавляет несколько полезных тождеств, например:

$$A \to B = \overline{B} \to A,\ (A \leftrightarrow B) = (A \to B)(B \to A) = A \cdot B \vee \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Пример 1.

Рассмотрим примеры на запись формулами сложных высказываний. Введем и обозначим несколько простых высказываний:

Z = «Яблоко зеленое», K = «Яблоко красное»,
V = «Яблоко вкусное», S = «Яблоко сладкое»,
G = «Яблоко кислое», W = «Яблоко крупное»,
L = «Яблоко мелкое», T = «Яблоко твердое»,
M = «Яблоко мягкое».

Составим из этих высказываний несколько сложных высказываний:

X1 = «Яблоко красное и вкусное»;
X2 = «Яблоко зеленое или мягкое»;
X3 = «Яблоко не только крупное, но и сладкое»;
X4 = «Яблоко красное, хотя и кислое, но вкусное»;
X5 = «Яблоко сладкое, но не вкусное»;
X6 = «Яблоко зеленое или красное, но твердое»;
X7 = «Неверно, что если яблоко крупное, то оно сладкое»;
X8 = «Если яблоко мелкое или зеленое, то оно твердое»;
X9 = «Яблоко крупное или вкусное, если оно красное и мягкое»;
X10 = «Если яблоко мелкое, то оно должно быть твердым, и все это только в случае, если яблоко зеленое»;
X11 = «Чтобы яблоко было сладким, необходимо, чтобы оно было красным»;
X12 = «Чтобы яблоко было сладким, достаточно, чтобы оно было красным»;
X13 = «Чтобы яблоко было сладким, необходимо и достаточно, чтобы оно было красным»;
X14 = «Яблоко кислое тогда и только тогда, когда оно мелкое и зеленое».

Запишем эти сложные высказывания формулами алгебры логики и на языке программирования:

X1 = KV = K AND V,
X2 = $Z \vee M$ = Z OR M,
X3 = WS = W AND S,
X4 = KGV = K AND G AND V,
X5 = $S\overline{V}$ = S AND NOT V,
X6 = (Z OR K) AND T,
X7 = $\overline{W \to S}$ = NOT(W IMP S),
X8 = $(M \vee Z) \to T$ = (M OR Z) IMP T,
X9 = $KM \to (W \vee V)$ = K AND M IMP W OR V,
X10 = $Z \to (L \to T)$,
X11 = $S \to K$ = S IMP K,
X12 = $K \to S$ = K IMP S,
X13 = $S \leftrightarrow K$ = S EQV K,
X14 = $G \leftrightarrow$(L AND Z).

Напомним очередность выполнения операций: NOT, AND, OR, XOR и EQV, IMP. Скобки вводятся в формулы с целью изменить эту очередность, так как сначала выполняются действия в скобках.

Для проверки правильности записей иногда полезно рассмотреть таблицу истинности записываемых функций. Например, могут вызвать сомнения функции X11 и X12. Представим их таблицей истинности 13.3.

Таблица 13.3

S K	S→K	K→S
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	1
1 1	1	1

Рассмотрим функцию X11 = S→K. Первая строка говорит о том, что не сладкое яблоко может быть не красным. Это высказывание истинно. Вторая строка указывает на то, что не сладкое яблоко может быть красным. Это высказывание также истинно. Четвертая строка также соответствует истинному высказыванию: сладкое яблоко должно быть также и красным. И только третья строка говорит, что не может быть, чтобы сладкое яблоко не было красным. Необходимо, чтобы оно было красным. Высказывание «Яблоко сладкое, но не красное» — ложное и противоречит смыслу исходной формулы: «Если яблоко сладкое, то оно красное».

Аналогично рассматривается функция X12 = K→S. Она принимает значение 0 (ложь) только на наборе SK = 01, который соответствует тому, что красное яблоко оказалось не сладким. Чтобы яблоко было сладким, достаточно, чтобы оно было красным. Но, как видно из таблицы, сладкое яблоко может быть и не красным. Видим, что требование достаточности менее жесткое, чем требование необходимости.

13.4. Решение логических задач

Структура логических задач может быть различной. Также различными бывают и подходы к их решению. Рассмотрим некоторые из приемов, которые приходится использовать, чтобы получить решение задачи.

При решении логических задач наиболее интересен этап формализации высказываний. На этом этапе желательно по возможности не вводить лишних переменных, которые будут увеличивать длину наборов аргументов и усложнять формулы функций. Например, каждую пару высказываний: тепло и холодно, больший и маленький остров, острый и тупой угол и тому подобных можно закодировать одной переменной и ее инверсией. Но это можно сделать только в случае, если по условию задачи нет третьей альтернативы, например, остров средней величины или прохладно.

Пусть задано или получено в процессе решения задачи несколько простых или сложных высказываний f1, f2, ..., fn, истинность которых известна. В этом случае обычно достаточно взять конъюнкцию этих высказываний F = f1 · f2 · ... · fn и определить набор простых высказываний, на котором эта конъюнкция принимает значение истина. Этот набор и будет решением задачи. Возможно, что таких наборов будет не один, что укажет на наличие нескольких решений. Возможен также вариант отсутствия решения.

Пример 2.

Школьник попросил троих друзей отгадать, какое он задумал число из набора: положительное, отрицательное, четное, нечетное, целое и дробное. Первый сказал, что, если это число четное, то оно положительное. Второй предположил, что задуманное число четное или целое и положительное. Третий был уверен, что, если это число положительное, то оно нечетное. Оказалось, что все три друга правы. Их высказывания истинны. Какое было задумано число?

Формализация и решение задачи.

Введем обозначения:

A = «Число положительное», $\overline{A}$ = «Число отрицательное»,

B = «Число четное», $\overline{B}$ = «Число нечетное»,

C = «Число целое», $\overline{C}$ = «Число дробное».

Используя введенные обозначения, запишем высказывания всех трех отгадчиков.

$$F1 = B \to A;$$

$$F2 = B \lor C \cdot A;$$

$$F3 = A \to \overline{B}.$$

Итоговая функция равна логическому произведению функций F1, F2 F3:

$$F = F1 \cdot F2 \cdot F3 = \overline{B} \cdot B \cdot \overline{A} \vee A \cdot \overline{B} \cdot C \cdot \overline{A} \vee A \cdot C \cdot \overline{A} \vee$$
$$\vee \overline{B} \cdot B \cdot \overline{B} \vee A \cdot B \cdot C \cdot \overline{B} \vee A \cdot \overline{B} \cdot C = A \cdot \overline{B} \cdot C.$$

Получили выражение, которое принимает значение истина только на одном наборе101, т.е. A = 1, B = 0 и C = 1, а это означает, что было задумано положительное нечетное целое число.

Может быть задано или получено несколько высказываний, о которых сказано, что из них только некоторое количество высказываний истинно. В этом случае организуется перебор вариантов. Например, заданы высказывания a и b, о которых известно, что из них только одно истинно. В этом случае записывают следующую функцию: $F = a\overline{b} \vee \overline{a}b$.

Если заданы высказывания a, b, c, d, из которых только одно истинно, то это соответствует следующей формуле:

$$F = a\overline{b}\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}b\overline{c}\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}c\overline{d} \vee \overline{a}\overline{b}\overline{c}d$$

Если сказано, что из этих высказываний истинны лишь какие-то два, то имеем следующую формулу:

$$F = ab\overline{c}\overline{d} \vee a\overline{b}c\overline{d} \vee a\overline{b}\overline{c}d \vee \overline{a}bc\overline{d} \vee \overline{a}b\overline{c}d \vee \overline{a}\overline{b}cd \text{ и т.д.}$$

Пример 3.

Друзья Андрея (A), Владимира (B) и Сергея (C) обсуждали их шансы на победу в шахматном турнире. Первый сказал, что победит A или C, второй заявил, что ни A ни B победы не видать. Третий был уверен, что победит A или B. В итоге оказалось, что угадал один из них. Кто из трех шахматистов победил?

Формализация и решение задачи.

Обозначим высказывания:

A = «Победил Андрей». Если A = 1, то высказывание истинно, если A = 0, то ложно. Аналогично для других участников:

B = «Победил Владимир»;

C = «Победил Сергей».

Запишем высказывания болельщиков в виде формул:

1-й болельщик: $F1 = A \vee C$;

2-й болельщик: $F2 = \overline{A} \cdot \overline{B}$;

3-й болельщик: $F3 = A \vee B$.

К этим трем предположениям болельщиков необходимо добавить функцию, которая введет естественное ограничение победы только одного из шахматистов:

$$F4 = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C.$$

Формула F4 показывает, что функция F4 может быть равна 1 только на трех наборах значений аргументов A, B и C: 100, 010 и 001, то есть при победе только одного из шахматистов.

Аналогичная ситуация сложилась и для болельщиков. По условию задачи прав оказался только один из них. Поэтому справедливо следующее выражение:

$$F1\overline{F2}\overline{F3} \vee \overline{F1}F2\overline{F3} \vee \overline{F1}\overline{F2}F3,$$

которое, как и функция F4, может быть истинным только на трех наборах аргументов F1, F2 и F3: 100, 010 и 001, т. е. одновременно, как и требуется, может быть истинным высказывание только одного из болельщиков.

Запишем итоговое выражение функции, которое приведет к решению задачи. Оно получается как результат логического произведения сформированных выше условий:

$$F = (F1 \cdot \overline{F2} \cdot \overline{F3} \vee \overline{F1} \cdot F2 \cdot \overline{F3} \vee \overline{F1} \cdot \overline{F2} \cdot F3) \cdot F4.$$

Формулы инверсных значений функций F1, F2 и F3 следующие: $\overline{F1} = \overline{A \vee C} = \overline{A} \cdot \overline{C}$, $\overline{F2} = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}} = A \vee B$, $\overline{F3} = \overline{A \vee B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$. Они получены опусканием общих для выражения инверсий на переменные по правилу де Моргана.

Подставим в формулу F формулы прямых и инверсных значений функций F1, F2 и F3 и упростим полученное выражение, пользуясь правилами тождественных преобразований булевых функций:

$$F = ((A \vee C) \cdot (A \vee B) \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot (\overline{A} \cdot \overline{B}) \vee$$
$$\vee \overline{A} \cdot C \cdot (A \vee B) \cdot (A \vee B)) \cdot F4.$$

Второй и третий члены дизъюнкции имеют одинаковые сомножители. По правилу $X \cdot X = X$ опускаем по одному из равных сомножителей и раскрываем скобки:

$$F = (A \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee A \cdot B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee C \cdot A \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee C \cdot B \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee$$
$$\vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot \overline{A} \cdot \overline{B} \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot A \vee \overline{A} \cdot \overline{C} \cdot B) \cdot F4.$$

Используем тождества $X \cdot \overline{X} = 0$, $X\&0 = 0$ и $X \vee 0 = X$. В соответствии с этими тождествами первые четыре и шестой члены дизъюнкции равны нулю. Раскрываем формулу F4. Упорядочим переменные в конъюнкциях. В результате получаем:

$$F = (\overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}) \cdot (A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} \vee \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot C).$$

Раскрываем скобки, опускаем равные нулю члены дизъюнкции и получаем ответ:

$$F = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}.$$

Полученное логическое выражение истинно только на одном наборе значений составляющих его простых выражений: A — ложно, B — истинно и C — ложно, т. е. победил Владимир.

Упрощение сложных логических формул требует внимательности, связано с затратами времени. Для упрощения сложных формул следует привлекать компьютер. Ниже приведена программа решения задачи о шахматистах.

Программа 13.1

```
REM Переход от формулы к таблице истинности
REM Решение задачи "Три шахматиста"
CLS : PRINT " A"; " B"; " C", " F"; PRINT
FOR A = 0 TO 1 : FOR B = 0 TO 1 : FOR C = 0 TO 1
    F1 = A OR C: F2 = NOT A AND NOT B. F3 = A OR B
    F4 = A AND NOT B AND NOT C OR NOT A AND B AND NOT C OR
         NOT A  AND NOT B AND C
    F = (F1 AND NOT F2 AND NOT F3 OR NOT F1 AND F2 AND NOT F3
        OR NOT F1 AND NOT F2 AND F3) AND F4
    PRINT A; B; C, F
NEXT C, B, A : END
```

В результате работы программы будет отпечатана таблица истинности функции F. Для этого программа последовательно формирует наборы значений аргументов A, B и C (000, 001, 010,...,111), подставляет их в функцию F и вычисляет ее значение на этих наборах. В таблице истинности только одна единица — против набора 010. Это и есть решение задачи — победил Владимир.

Напомним, что некоторые задачи могут иметь неоднозначное решение. В этом случае итоговая функция может быть истинна не на одном наборе значений аргументов, код функции содержит несколько единиц. Возможен вариант, когда решения задачи нет — в коде функции нет единиц.

Пример 4.

На вопрос, какая будет завтра погода, синоптик ответил:

1. Если будет мороз, то снег выпадет только при пасмурной погоде.
2. Если не будет мороза, но пойдет снег, то погода будет пасмурной.
3. Не будет ни снега, ни дождя, если погода будет пасмурной.
4. Неверно, что, если не будет мороза, то для выпадения снега или дождя достаточно наличие пасмурного неба.

Какую погоду предсказал синоптик?

Формализацию задачи.

Обозначим высказывания.

M = «мороз», C = «снег», P = «пасмурно», D = «дождь».

Запишем формулы:

$F1 = M \rightarrow (C \rightarrow P)$;	F1 = m IMP (p IMP c);
$F2 = \overline{M} \cdot C \rightarrow P$;	F2 = (NOT m AND c) IMP p;
$F3 = P \rightarrow \overline{C} \cdot \overline{D}$;	F3 = p IMP (NOT c AND NOT d);
$F4 = \overline{\overline{M} \rightarrow (P \rightarrow C \vee D)}$;	F4 = NOT (NOT m IMP (p IMP c OR d).

Итоговая функция равна: $F = F1 \cdot F2 \cdot F3 \cdot F4$.

После подстановки переменных и упрощения получаем: $F = \overline{M} \cdot P \cdot \overline{C} \cdot \overline{D}$, что означает «ни мороза, ни снега, ни дождя, но пасмурно» (F = 1 на наборе 0100).

Пример 5.

В соревнованиях по гимнастике участвуют Алла, Валя, Сима и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

1. 1-е место займет Сима (x1), Валя будет 2-й (x2);
2. 2-й будет Сима (x3), Даша займет 3-е место (x4);
3. у Аллы 2-е место (x5), у Даши 4-е (x6).

По окончании соревнований оказалось, что в каждом из предположений только одно высказывание истинно, остальные — ложны. Как распределились места, если все девушки заняли разные места?

Каждое из трех предположений содержит по два высказывания, которым уже в постановке задачи присвоены идентификаторы x1, x2, x3, x4, x5 и x6. Задачу решает следующая программа.

Программа 13.2

```
REM Решение примера 5. Соревнования по гимнастике.
CLS
FOR x1 = 0 TO 1: FOR x2 = 0 TO 1: FOR x3 = 0 TO 1
FOR x4 = 0 TO 1: FOR x5 = 0 TO 1: FOR x6 = 0 TO 1
   f1 = x1 AND NOT x2 OR NOT x1 AND x2
   f2 = x3 AND NOT x4 OR NOT x3 AND x4
   f3 = x5 AND NOT x6 OR NOT x5 AND x6
   f4 = NOT (x1 AND x3)
   f5 = NOT (x4 AND x6)
   f6 = x2 AND NOT x3 AND NOT x5 OR NOT x2 AND x3 AND NOT x5
OR NOT x2 AND NOT x3 AND x5
   f = f1 AND f2 AND f3 AND f4 AND f5 AND f6
IF f = 1 THEN PRINT x1; x2; x3; x4; x5; x6, f1; f2; f3; f4; f5; f6, f
NEXT x6, x5, x4, x3, x2, x1: END
```

Функции f1, f2 и f3 определяют условие истинности только одного из двух высказываний в каждом предположении.

Функции f4, f5 и f6 вносят естественные ограничения: каждое место может занять только одна гимнастка и каждая гимнастка может занять только одно место. Заметим, что при отказе от этих ограничений возможно получение других ответов.

Распечатка итоговой таблицы истинности не умещается полностью на экране монитора ввиду большого числа логических переменных. В таких случаях достаточно выводить только строки таблицы, в которых итоговая логическая функция принимает единичные значения. Напомним, что в коде функций могут выводиться –1 вместо 1 и –2 вместо 0.

В результате работы программы получен следующий результат: 100110 1, т.е. Сима заняла 1 место, Даша — 3 место, у Аллы — 2 место, а Вале досталось 4 место.

Задания для самостоятельной работы

1. Задано несколько простых высказываний о погоде. Из них составлены сложные высказывания. Записать эти высказывания формулами алгебры логики и на языке программирования.

M = «На улице мороз»,	O = «На улице оттепель»,
N = «Ветер северный»,	S = «Ветер южный»,
D = «Идет дождь»,	G = «На дорогах гололедица»,
C = «Идет снег»,	T = «Температура плюсовая»,
I = «На деревьях иней»,	U = «На улице туман»,
P = «Небо пасмурное».	

X1 = «На улице мороз, идет снег, но гололедицы нет»;

X2 = «На улице оттепель и на деревьях иней или на улице туман»;

X3 = «Если северный ветер или идет снег, то на улице мороз»;

X4 = «На дорогах нет гололедицы, на деревьях нет инея и на улице нет тумана, если дует северный ветер при морозе»;

X5 = «На улице оттепель или на деревьях иней, если температура плюсовая»;

X6 = «Для того, чтобы шел дождь или снег, необходимо наличие пасмурного неба»;

X7 = «Для появления на деревьях инея, достаточно пасмурного неба и оттепели»;

X8 = «Для гололедицы на дорогах необходимо и достаточно наличие плюсовой температуры при северном ветре и тумане»;

X9 = «Чтобы не было ни снега ни дождя, необходимо чтобы небо не было пасмурным»;

X10 = «На улице туман или на деревьях иней может быть тогда и только тогда, когда на улице оттепель»;

X11 = «При южном ветре на улице оттепель только тогда, когда пасмурное небо и плюсовая температура»;

X12 = «На деревьях иней, на улице туман и на дорогах гололедица тогда, когда дует южный ветер и на улице оттепель».

2. Задано несколько простых высказываний о цветах. Из них составлены сложные высказывания, которые записаны формулами алгебры логики и на языке программирования. Запишите эти высказывания на естественном, разговорном языке.

A = «Цветок ароматный»,	K = «Цветок крупный»,
M = «Цветок мелкий»,	R = «Цветок красный»,
B = «Цветок белый»,	G = «Цветок желтый»,
S = «Цветок астра»,	Z = «Цветок роза»,
T = «Цветок тюльпан»,	P = «Цветок полевой»,
D = «Цветок домашний»,	V = «Цветок садовый»,

$Y1 = K\ A\ (P \vee V)$ = K AND A AND (P OR V),

$Y2 = (K \vee M)\ B\ \overline{D}$ = (K OR M) AND B AND NOT D,

$Y3 = V \to (A \vee K)$ = V IMP (A OR K),

$Y4 = A\ K \leftrightarrow (D \vee V)$ = (A AND K) IMP (D OR V),

$Y5 = T\ P \to (R \vee G)$ = (T AND P) IMP (R OR G),

$Y6 = (\overline{S}Z \to (K \vee M))A$ = (NOT S AND Z IMP (K OR M)) AND A,

$Y7 = \overline{(P \to A)}\,\overline{(V \to M)}$ = NOT (P IMP A) AND NOT (V IMP A),

$Y8 = \overline{(KB \vee GA) \to (S \vee Z)}$ = NOT (K AND B OR G AND A IMP S OR Z),

3. Решите задачу (В.Н. Касаткин). Алеша, Боря и Гриша нашли в земле сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

   Алеша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V в.».

   Борис: «Это сосуд финикийский и изготовлен в III в.».

   Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV в.».

   Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

4. Решите задачу. Почетный кубок оспаривали четыре команды: Авангард, Богатырь, Горизонт и Победа. Болельщики Сеня, Боря и Дима обсуждали их шансы на победу: Сеня считал, что победу одержит либо Авангард, либо Богатырь; Борис был уверен, что Авангарду кубка не видать; Дима был уверен, что ни Богатырь, ни Победа трофеи не выиграют. Правым оказался один из них. У кого кубок?

5. Решите задачу (В.В. Мадер). Андрей, Ваня и Саша собрались в поход. Учитель, хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:

   а) Андрей пойдет в поход только тогда, когда пойдут Ваня и Саша.

   б) Андрей и Саша друзья, а это значит, что они пойдут в поход вместе или же оба останутся дома.

   в) Чтобы Саша пошел в поход, необходимо, чтобы пошел Ваня.

   Когда ребята ношли в поход, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из названных ребят пошел в поход?

В заключение запишем постановку двух старинных шуточных логических задач для устного решения.

6. Три мудреца заночевали под пальмой у костра. Пока они спали, какой-то шутник испачкал им лбы сажей. Проснувшись и увидев испачканные лица, все трое стали смеяться. Но смеялись они не долго, так как каждый понял, что его лицо также испачкано. На то они и мудрецы. Как они рассуждали?

7. Имеется два белых и три черных колпака. Три случайно выбранных из них колпака одели на трех сидящих друг за другом мудрецов. Первый мудрец видит колпаки второго и третьего и говорит: «Я не знаю какой на мне колпак». Второй мудрец видит перед собой колпак только третьего мудреца и, услышав слова первого мудреца, говорит: «Я тоже не знаю какой на мне колпак». Услышав ответы первого и второго, третий мудрец говорит: «А я знаю какой на мне колпак!». Каковы рассуждения всех трех мудрецов и какой колпак на третьем мудреце?