A10 (базовый уровень, время – 1 мин)

Тема: Преобразование логических выражений. Формулы де Моргана.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ($\wedge$, $\vee$, $\neg$), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает $\wedge$ и $\vee$. Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение).

В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ($\wedge$, $\vee$, $\neg$), что еще раз подчеркивает проблему.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

  $\neg$ **A**, $\overline{A}$ — не A (отрицание, инверсия)

  A $\wedge$ **B**, $A \cdot B$ — A и B (логическое умножение, конъюнкция)

  A $\vee$ **B**, $A + B$ — A или B (логическое сложение, дизъюнкция)

  A $\rightarrow$ **B** — импликация (следование)

- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

  A $\rightarrow$ **B** = $\neg$ **A** $\vee$ **B** или в других обозначениях **A** $\rightarrow$ **B** = $\overline{A} + B$

- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для **И**	Для **ИЛИ**
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A;\ A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A;\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

- фактически это задание на применение законов де Моргана (хотя об этом нигде не говорится):

  $\neg$ (**A** $\wedge$ **B**) = $\neg$ **A** $\vee$ $\neg$ **B** $\qquad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$

  $\neg$ (**A** $\vee$ **B**) = $\neg$ **A** $\wedge$ $\neg$ **B** $\qquad \overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Пример задания:

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению **A ∧ ¬ (¬B ∨ C)** .

1) **¬A ∨ ¬B ∨ ¬C** 2) **A ∨ ¬B ∨ ¬C** 3) **A ∧ B ∧ ¬C** 4) **A ∧ ¬B ∧ C**

Решение (вариант 1, использование законов де Моргана):

1) перепишем заданное выражение и ответы в других обозначениях:

   заданное выражение $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$

   ответы: 1) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ 2) $A + \overline{B} + \overline{C}$ 3) $A \cdot B \cdot \overline{C}$ 4) $A \cdot \overline{B} \cdot C$

2) посмотрев на заданное выражение, видим инверсию (операцию «НЕ») для сложного выражения в скобках, которую раскрываем по формуле де Моргана,

$$A \cdot \overline{(\overline{B} + C)} = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C}$$

   а затем используем закон двойного отрицания по которому $\overline{\overline{B}} = B$:

$$A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C} = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

3) таким образом, правильный ответ – 3 .

Возможные ловушки и проблемы:

- серьезные сложности представляет применяемая в заданиях ЕГЭ форма записи логических выражений с «закорючками», поэтому рекомендуется сначала *внимательно* перевести их в «удобоваримый» вид; при этом сразу становится понятно, что ответы 1 и 2 заведомо неверные
- при использовании законов де Моргана часто забывают, что нужно заменить «И» на «ИЛИ» и «ИЛИ» на «И» (возможный неверный ответ $A \cdot \left(B + \overline{C}\right)$)
- расчет на то, что при использовании законов де Моргана инверсия сложного выражения по ошибке «просто пропадет», и все сведется к замене «ИЛИ» на «И» (неверный ответ $A \cdot \overline{B} \cdot C$)
- иногда для решения нужно упростить не только исходное выражение, но и заданные ответы, если они содержат импликацию или инверсию сложных выражений

Решение (вариант 2, через таблицы истинности, если забыли формулы де Моргана):

1) перепишем заданное выражение в других обозначениях:

   заданное выражение $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$

   ответы: 1) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ 2) $A + \overline{B} + \overline{C}$ 3) $A \cdot B \cdot \overline{C}$ 4) $A \cdot \overline{B} \cdot C$

2) для доказательства равносильности двух логических выражений достаточно показать, что они принимают равные значения при всех возможных комбинациях исходных данных; поэтому можно составить таблицы истинности для исходного выражения и всех ответов и сравнить их
3) здесь 3 переменных, каждая из которых принимает два возможных значения (всего 8 вариантов, которые в таблице истинности записывают по возрастанию двоичных кодов – см. презентацию «Логика»)
4) исходное выражение $A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$ истинно только тогда, когда $A = 1$ и $\overline{B} + C = 0$, то есть только при $A = 1, B = 1, C = 0$. (в таблице истинности одна единица, остальные – нули)
5) выражение $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ истинно, если хотя бы одна из переменных равна нулю, то есть, оно будет ложно только при $A = B = C = 1$ (в таблице истинности один нуль, остальные – единицы)
6) аналогично выражение $A + \overline{B} + \overline{C}$ ложно только при $A = 0,\ B = C = 1$, а в остальных случаях – истинно

7) выражение $A \cdot B \cdot \overline{C}$ истинно только при $A = B = 1,\ \ C = 0$, а в остальных случаях – ложно

8) выражение $A \cdot \overline{B} \cdot C$ истинно только при $A = 1,\ B = 0,\ C = 1$, а в остальных случаях – ложно

9) объединяя все эти результаты в таблицу, получаем:

A	B	C	$A \cdot \overline{(\overline{B} + C)}$	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	$A + \overline{B} + \overline{C}$	$A \cdot B \cdot \overline{C}$	$A \cdot \overline{B} \cdot C$
0	0	0	0	**1**	**1**	0	0
0	0	1	0	**1**	**1**	0	0
0	1	0	0	**1**	**1**	0	0
0	1	1	0	**1**	0	0	0
1	0	0	0	**1**	**1**	0	0
1	0	1	0	**1**	**1**	0	**1**
1	1	0	**1**	**1**	**1**	**1**	0
1	1	1	0	0	**1**	0	0

10) видим, что таблицы истинности исходного выражения и $A \cdot B \cdot \overline{C}$ совпали во всех строчках

11) таким образом, правильный ответ – 3 .

Возможные проблемы:
- сравнительно большой объем работы

Выводы:

1) очевидно, что проще использовать первый вариант решения (упрощение исходного выражения и, если нужно, ответов), но для этого нужно помнить формулы
2) если формулы забыты, всегда есть простой (хотя и более трудоемкий) вариант решения через таблицы истинности.

Еще пример задания[1]:

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению

¬ (A ∨ ¬B) ∨ ¬ (A ∨ B) ∨ A ∧ B

1) **¬B ∧ A**　　2) **A ∧ B ∨ ¬B**　　3) **A ∧ B ∨ ¬A**　　4) **¬A**

Решение (вариант 1, использование законов де Моргана):

1) перепишем заданное выражение в других обозначениях:

   заданное выражение $\overline{(A + \overline{B})} + \overline{(A + B)} + A \cdot B$

   ответы: 1) $\overline{B} \cdot A$　2) $A \cdot B + \overline{B}$　3) $A \cdot B + \overline{A}$　4) $\overline{A}$

2) проще всего упростить заданное выражение; сначала раскрываем инверсию сложных выражений, используя законы де Моргана:

$$\overline{(A + \overline{B})} + \overline{(A + B)} + A \cdot B = \overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

3) выносим за скобки $\overline{A}$ в первых двух слагаемых и используем закон исключения третьего $B + \overline{B} = 1$:

$$\overline{A} \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B = \overline{A} \cdot (B + \overline{B}) + A \cdot B = \overline{A} + A \cdot B$$

4) наконец, применяем распределительный закон для операции «И» и еще раз закон исключения третьего $\overline{A} + A = 1$:

$$\overline{A} + A \cdot B = (\overline{A} + A)(\overline{A} + B) = \overline{A} + B$$

5) дальше уже не упрощается…

6) теперь замечаем, что такого ответа нет среди предложенных вариантов!

[1] Самылкина Н.Н., Островская Е.М. Информатика: тренировочные задания. – М.: Эксмо, 2009.

7) это означает, что ответы тоже можно упростить; упрощаем ответы 2 и 3, применяя распределительный закон и закон исключения третьего

ответы: 2) $A \cdot B + \overline{B} = (A + \overline{B}) \cdot (B + \overline{B}) = A + \overline{B}$

3) $A \cdot B + \overline{A} = (A + \overline{A}) \cdot (B + \overline{A}) = B + \overline{A} = \overline{A} + B$

8) видим, что упрощенное выражение для ответа 3 совпало с упрощенным исходным выражением

9) таким образом, правильный ответ – 3

10) заметим, что этот пример можно также решать через таблицы истинности, но это более трудоемко.

Возможные проблемы:

- нужно хорошо помнить законы алгебры логики, которые не имеют аналога в математике (и «математическая» интуиция отказывает), но часто используются при упрощении логических выражений:

законы де Моргана:	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
распределительный закон:	$A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = A + B$
закон поглощения:	$A + A \cdot B = A$, $A \cdot (A + B) = A$
закон исключения третьего:	$\overline{A} + A = 1$, $\overline{A} \cdot A = 0$

Задачи для тренировки[2]*:*

1) Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(A \vee \neg B \vee C)$?
   1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $A \wedge \neg B \wedge C$ 3) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ 4) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$

2) Какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(A \wedge B) \wedge \neg C$?
   1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$ 3) $(\neg A \vee \neg B) \wedge C$ 4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

3) Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(\neg A \wedge B)$?
   1) $A \vee \neg B$ 2) $\neg A \vee B$ 3) $B \wedge \neg A$ 4) $A \wedge \neg B$

4) Какое логическое выражение равносильно выражению $\neg(A \vee \neg B)$?
   1) $A \vee B$ 2) $A \wedge B$ 3) $\neg A \vee \neg B$ 4) $\neg A \wedge B$

5) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C$?
   1) $(A \vee \neg B) \vee C$ 2) $A \wedge B \wedge C$ 3) $(A \rightarrow \neg B) \vee C$ 4) $\neg(A \vee \neg B) \vee C$

6) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \wedge \neg(\neg B \wedge \neg C)$?
   1) $A \wedge B \wedge C$ 2) $A \vee B \vee \neg C$ 3) $A \wedge (B \vee C)$ 4) $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$

7) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee B) \wedge \neg C$?
   1) $(A \vee B) \wedge \neg C$ 2) $(A \wedge B) \wedge C$ 3) $(\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C$ 4) $(A \vee B) \wedge C$

8) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee \neg B) \wedge \neg C$?
   1) $A \vee B \wedge C$ 2) $\neg(A \wedge B) \wedge C$ 3) $\neg(A \vee C) \vee B$ 4) $\neg(A \vee C) \wedge B$

9) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg C$?
   1) $(A \wedge B) \wedge \neg C$ 2) $(A \vee B) \vee C$ 3) $(A \wedge \neg B) \vee \neg C$ 4) $(A \vee \neg B) \wedge \neg C$

10) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee B) \rightarrow C$?
    1) $\neg A \wedge B \wedge C$ 2) $A \vee B \vee C$ 3) $\neg(A \vee B) \vee C$ 4) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

11) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \vee \neg B) \wedge C$?
    1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $(\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C$ 3) $(A \vee B) \wedge C$ 4) $A \wedge B \wedge C$

12) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \wedge \neg(B \vee \neg C)$?
    1) $A \wedge \neg B \wedge C$ 2) $A \vee \neg B \vee \neg C$ 3) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$ 4) $A \vee \neg B \vee C$

13) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \vee B) \wedge C$?
    1) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ 2) $(A \wedge \neg B) \vee C$ 3) $(A \wedge B) \vee C$ 4) $A \wedge \neg B \wedge C$

---

[2] Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2009 гг.
2. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
3. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. Информатика: тренировочные задания. – М.: Эксмо, 2009-2010.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
5. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.

14) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \wedge \neg B \wedge \neg C)$?

1) $\neg A \vee B \vee C$ 2) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 3) $\neg A \wedge B \wedge C$ 4) $A \wedge B \wedge \neg C$

15) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge C$?

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $A \wedge B \wedge C$ 3) $(A \vee B) \wedge C$ 4) $(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C$

16) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge (\neg B \vee C))$?

1) $\neg A \vee \neg B \vee C$ 2) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$ 3) $A \vee B \wedge \neg C$ 4) $A \wedge \neg B \wedge C$

17) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee \neg B \wedge C)$?

1) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ 2) $\neg A \wedge B \vee \neg C$ 3) $\neg A \wedge (B \vee C)$ 4) $\neg A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg C$

18) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \wedge \neg(\neg B \vee \neg\neg C) \vee D$?

1) $\neg A \wedge \neg B \vee C \vee D$ 2) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C \vee D$

3) $\neg A \wedge B \wedge \neg C \vee D$ 4) $\neg A \wedge B \wedge C \wedge D$

19) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee \neg B) \wedge \neg C \wedge D$?

1) $A \wedge \neg B \wedge C \wedge \neg D$ 2) $A \vee \neg B \wedge C \wedge D$

3) $\neg A \vee B \vee \neg C \vee D$ 4) $\neg A \wedge B \wedge \neg C \wedge D$

20) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg B \wedge \neg C) \wedge \neg A$?

1) $\neg A \wedge (B \wedge C)$ 2) $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ 3) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 4) $\neg A \wedge (B \vee C)$

21) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \wedge (\neg B \vee C)$?

1) $A \wedge \neg B \wedge C$ 2) $A \wedge \neg B \vee C \wedge A$ 3) $A \wedge \neg B \vee C$ 4) $A \wedge B \vee A \wedge \neg C$

22) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge B \vee \neg C)$?

1) $A \vee \neg B \wedge C$ 2) $A \wedge \neg B \vee C$ 3) $A \wedge (\neg B \vee C)$ 4) $A \wedge C \vee \neg B \wedge C$

23) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg\neg A \vee \neg B \vee C)$?

1) $A \wedge \neg B \wedge C$ 2) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$ 3) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 4) $A \vee \neg B \vee C$

24) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \wedge B) \vee \neg C$?

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$ 2) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ 3) $\neg A \wedge \neg B \wedge C$ 4) $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$

25) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \vee \neg(\neg B \vee \neg C)$?

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$ 2) $A \vee (B \wedge C)$ 3) $A \vee B \vee C$ 4) $A \vee \neg B \vee \neg C$

26) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \vee \neg A \wedge B$?

1) $\neg A \vee \neg B$ 2) $A \wedge \neg B$ 3) $A \wedge B$ 4) $A \vee B$

27) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)$?

1) $\neg A \vee \neg B$ 2) A 3) B 4) $A \wedge \neg B$

28) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $(\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$?

1) $\neg A$ 2) $A \wedge \neg B$ 3) $A \wedge B$ 4) $\neg B$

29) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \vee B \wedge \neg A \wedge B$?

1) $\neg A$ 2) $\neg A \wedge \neg B$ 3) $A \wedge B$ 4) $\neg A \vee B$

30) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$?

1) $A \wedge B$ 2) $A \vee B$ 3) $\neg A \vee \neg B$ 4) $\neg A \wedge \neg B$

31) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \wedge B \vee \neg(A \vee \neg B)$?

1) $\neg B \wedge \neg A$ 2) $A \wedge \neg B$ 3) $B \wedge \neg A$ 4) $B \wedge A$

32) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee \neg B) \vee \neg(A \vee B) \vee A \wedge B$?

1) $\neg B \wedge A$ 2) $A \wedge B \vee \neg B$ 3) $A \wedge B \vee \neg A$ 4) $\neg A$

33) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge (\neg B \vee C))$?

1) $\neg A \vee \neg B \vee C$ 2) $A \wedge \neg B \vee \neg C$ 3) $A \vee B \wedge \neg C$ 4) $A \wedge \neg B \wedge C$

34) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \vee (\neg(\neg A \wedge B)) \vee \neg C$?

1) $\neg A \vee \neg C$ 2) $\neg B \vee \neg C$ 3) 1 4) 0

35) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \wedge \neg B) \vee \neg(\neg B \wedge \neg C)$?

1) $A \vee B \vee C$ 2) $A \wedge \neg B \wedge C$ 3) $A \wedge B \wedge C$ 4) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

36) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(A \vee B) \wedge \neg(B \vee \neg C)$?

1) $\neg A \lor \neg B \lor \neg C$ 2) $A \land \neg B \land \neg C$ 3) $\neg A \land \neg B \land C$ 4) $A \land \neg B \land C$

37) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $A \lor (\neg(A \land B)) \lor C$?

1) $\neg A \lor C$ 2) 1 3) $\neg B \lor C$ 4) 0

38) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \to (\neg B \to C)$?

1) $A \land (B \lor \neg C)$ 2) $\neg A \lor B \land C$ 3) $A \land \neg B \lor C$ 4) $A \lor B \lor C$

39) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg A \land \neg B \lor C$?

1) $A \land B \lor \neg C$ 2) $A \lor B \to C$ 3) $\neg A \land \neg B \land \neg C$ 4) $A \lor B \lor \neg C$

40) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $\neg(\neg A \land B) \land (C \lor \neg B)$?

1) $\neg B \land (C \lor A)$ 2) $\neg B \lor (C \land A)$ 3) $(C \land A) \lor (C \land B)$ 4) $\neg A \lor \neg B \lor C$

41) Какое логическое выражение эквивалентно выражению $(A \land B) \lor (B \land \neg C)$?

1) $(C \land A) \lor (C \land B)$ 2) $(\neg A \lor C) \land (\neg B \lor C)$

3) $\neg A \lor B \lor C$ 4) $B \land (A \lor \neg C)$