B10 (высокий уровень, время – 10 мин)

Тема: Преобразование логических выражений.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ($\wedge$, $\vee$, $\neg$), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает $\wedge$ и $\vee$. Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение).

В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ($\wedge$, $\vee$, $\neg$), что еще раз подчеркивает проблему.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg$ **A**, $\overline{A}$	не А (отрицание, инверсия)
A $\wedge$ **B**, $A \cdot B$	А и В (логическое умножение, конъюнкция)
A $\vee$ **B**, $A + B$	А или В (логическое сложение, дизъюнкция)
A $\to$ **B**	импликация (следование)
A $\leftrightarrow$ **B**, $A \equiv B$	эквиваленция (эквивалентность, равносильность)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация», «эквиваленция» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

  A $\to$ **B** = $\neg$ **A** $\vee$ **B** или в других обозначениях **A** $\to$ **B** = $\overline{A} + B$
- операцию «эквиваленция» также можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

  A $\leftrightarrow$ **B** = $\neg$ **A** $\wedge$ $\neg$ **B** $\vee$ **A** $\wedge$ **B** или в других обозначениях **A** $\leftrightarrow$ **B** = $\overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$
- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- логическое произведение А·В·С·… равно 1 (выражение истинно) только тогда, когда все сомножители равны 1 (а в остальных случаях равно 0)
- логическая сумма А+В+С+… равна 0 (выражение ложно) только тогда, когда все слагаемые равны 0 (а в остальных случаях равна 1)
- правила преобразования логических выражений (законы алгебры логики):

Закон	Для **И**	Для **ИЛИ**
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
исключения констант	$A \cdot 1 = A;\ A \cdot 0 = 0$	$A + 0 = A;\ A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Пример задания:

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

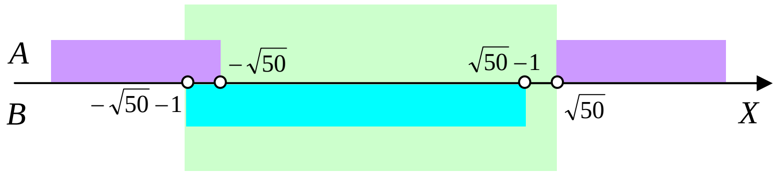
(50 < X·X) → (50 > (X+1)·(X+1))

Решение (вариант 1):

1) это операция импликации между двумя отношениями $A = (50 < X^2)$ и $B = (50 > (X+1)^2)$
2) попробуем сначала решить неравенства

$$A = 50 < X^2 \Rightarrow |X| > \sqrt{50}, \qquad B = 50 > (X+1)^2 \Rightarrow |X+1| < \sqrt{50}$$

3) обозначим эти области на оси X:



на рисунке фиолетовые зоны обозначают область, где истинно выражение A, голубая зона – это область, где истинно B

4) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

5) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$; область истинности выделена зеленым цветом
6) поэтому наибольшее целое число, удовлетворяющее условию – это первое целое число, меньшее $\sqrt{50} \approx 7{,}1$, то есть, 7
7) таким образом, верный ответ – 7 .

Возможные проблемы:

- в этом примере потребовалось применить знания не только (и не столько) из курса информатики, но и умение решать неравенства
- нужно не забыть правила извлечения квадратного корня из обеих частей неравенства (операции с модулями)

Решение (вариант 2, преобразование выражения):

1) сначала можно преобразовать импликацию, выразив ее через «ИЛИ» и «НЕ»:

$$A \to B = \overline{A} + B$$

2) это значит, что выражение истинно там, где $A = 0$ или $B = 1$
3) дальнейшие действия точно такие же, как и в варианте 1.

Возможные проблемы:

- нужно помнить формулу для преобразования импликации

Решение (вариант 3, математический):

1) это операция импликации между двумя отношениями $A = (50 < X^2)$ и $B = (50 > (X+1)^2)$
2) пусть $A = (X^2 > 50)$ – истинно, тогда, с учетом того, что $X^2 > 0$, находим, что $B = ((X+1)^2 < 50)$ – ложно, таким образом, импликация $A \to B$ ложна
3) следовательно, импликация может быть истинной только при $X^2 \le 50$; поскольку в этом случае высказывание A ложно, то $A \to B = 0 \to B = 1$ при любом B
4) максимальное целое значение X, при котором $X^2 \le 50$, равно 7

5) таким образом, верный ответ – 7 .

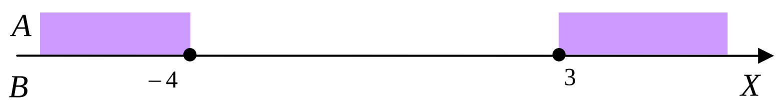
Еще пример задания:

Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

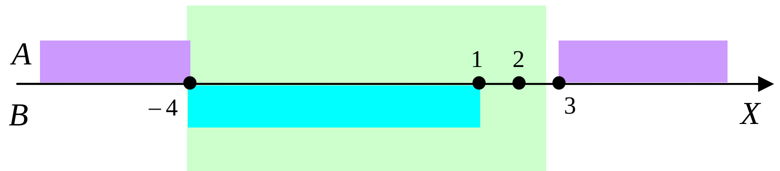
$$(10 < X \cdot (X+1)) \rightarrow (10 > (X+1) \cdot (X+2))$$

Решение (в целых числах):

1) это операция импликации между двумя отношениями:
$$A_0 = (10 < X \cdot (X+1)) \text{ и } B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$$
2) конечно, здесь можно применить тот же способ, что и в предыдущем примере, однако при этом понадобится решать квадратные уравнения (*не хочется…*)
3) заметим, что по условию нас интересуют **только целые числа,** поэтому можно попытаться как-то преобразовать исходное выражение, получив равносильное высказывание (как понятно из предыдущего примера, точные значения корней нас совершенно не интересуют!)
4) рассмотрим неравенство $A_0 = (10 < X \cdot (X+1))$: очевидно, что X может быть как положительным, так и отрицательным числом;
5) легко проверить, что в области $X \geq 0$ высказывание A_0 истинно при всех целых $X \geq 3$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \leq -4$ (чтобы не запутаться, удобнее использовать **нестрогие неравенства**, $\leq$ и $\geq$, вместо $<$ и $>$)
6) поэтому для целых X можно заменить A_0 на равносильное выражение
$$A = (X \leq -4) + (X \geq 3)$$
7) область истинности выражения A – объединение двух бесконечных интервалов:



8) теперь рассмотрим второе неравенство $B_0 = (10 > (X+1) \cdot (X+2))$: очевидно, что X так же может быть как положительным, так и отрицательным числом;
9) в области $X \geq 0$ высказывание B_0 истинно при всех целых $X \leq 1$, а в области $X \leq 0$ – при всех целых $X \geq -4$, поэтому для целых X можно заменить B_0 на равносильное выражение
$$B = (-4 \leq X \leq 0) + (0 \leq X \leq 1) = (-4 \leq X \leq 1)$$
10) область истинности выражения B – закрытый интервал, обозначенный голубой полоской



11) вспомним таблицу истинности операции «импликация»:

A	B	A → B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

12) согласно таблице, заданное выражение истинно везде, кроме областей, где $A = 1$ и $B = 0$; область истинности выделена на рисунке зеленым цветом;

13) обратите внимание, что значение $X = 3$ уже **не** входит в зеленую зону, потому что там $A = 1$ и $B = 0$, то есть импликация дает 0
14) по схеме видно, что максимальное целое число в зеленой области – 2
15) таким образом, верный ответ – 2.

Возможные проблемы:

- нужно помнить, что мы рассматриваем значения выражения только для целых X, при этом появляются свои особенности: может появиться желание продлить зеленую область до точки $X = 3$, что приведет к неверному ответу, потому что там уже $A = 1$ и $A \to B = 1 \to 0 = 0$

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \vee L) \to (L \wedge M \wedge N)) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, разделение на части):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$((K + L) \to (L \cdot M \cdot N)) = 0$$
2) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это равенство верно тогда и только тогда, когда одновременно
$$K + L = 1 \quad \text{и} \quad L \cdot M \cdot N = 0$$
3) из первого уравнения следует, что хотя бы одна из переменных, K или L, равна 1 (или обе вместе); поэтому рассмотрим три случая
4) если K = 1 и L = 0, то второе равенство выполняется при любых M и N; поскольку существует 4 комбинации двух логических переменных (00, 01, 10 и 11), имеем **4** разных решения
5) если K = 1 и L = 1, то второе равенство выполняется при M · N = 0; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
6) если K = 0, то обязательно L = 1 (из первого уравнения); при этом второе равенство выполняется при M · N = 0; существует 3 таких комбинации (00, 01 и 10), имеем еще **3** решения
7) таким образом, всего получаем 4 + 3 + 3 = 10 решений.

Совет:

- лучше начинать с того уравнения, где меньше переменных

Возможные проблемы:

- есть риск потерять какие-то решения при переборе вариантов

Решение (вариант 2, через таблицы истинности):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$((K + L) \to (L \cdot M \cdot N)) = 0$$
2) построим таблицу для логического выражения
$$X = ((K + L) \to (L \cdot M \cdot N))$$
и подсчитаем, сколько в ней нулей, это и будет ответ

3) наше выражение зависит от четырех переменных, поэтому в таблице будет $2^4 = 16$ строчек (16 возможных комбинация четырех логических значений)
4) подставляем различные комбинации в формулу для **X;** несмотря на большое количество вариантов, таблица строится легко: достаточно вспомнить, что выражение **K + L** ложно только при **K = L = 0**, а выражение **L·M·N** истинно только при **L = M = N = 1**.

K	*L*	*M*	*N*	*K+L*	*L·M·N*	*X*
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1

5) в последнем столбце 10 нулей; это значит, что есть 10 разных комбинаций, при которых выражение **X** равно нулю, то есть исходное уравнение имеет 10 решений
6) таким образом, всего 10 решений.

Возможные проблемы:
- нужно строить таблицу истинности функции от 4 переменных, это трудоемко, легко ошибиться

Еще пример задания:

Укажите значения переменных К, L, M, N, при которых логическое выражение

(¬(M ∨ L) ∧ K) → (¬K ∧ ¬M ∨ N)

ложно. Ответ запишите в виде строки из 4 символов: значений переменных К, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что К=1, L=1, M=0, N=1.

Решение (вариант 1, анализ исходного выражения):

1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций (условие «выражение ложно» означает, что оно равно логическому нулю):
$$(\overline{(M+L)}\cdot K) \to (\overline{K}\cdot\overline{M}+N) = 0$$
2) из формулировки условия следует, что выражение должно быть ложно только для одного набора переменных
3) из таблицы истинности операции «импликация» (см. первую задачу) следует, что это выражение ложно тогда и только тогда, когда одновременно
$$\overline{(M+L)}\cdot K = 1 \quad \text{и} \quad \overline{K}\cdot\overline{M}+N = 0$$

4) первое равенство (логическое произведение равно 1) выполняется тогда и только тогда, когда $K = 1$и $\overline{M + L} = 1$; отсюда следует $M + L = 0$ (логическая сумма равна нулю), что может быть только при $M = L = 0$; таким образом, три переменных мы уже определили
5) из второго условия, $\overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$, при $K = 1$ и $M = 0$ получаем $N = 0$
6) таким образом, правильный ответ – 1000.

Возможные проблемы:
- переменные однозначно определяются только для ситуаций «сумма = 0» (все равны 0) и «произведение = 1» (все равны 1), в остальных случаях нужно рассматривать разные варианты
- не всегда выражение сразу распадается на 2 (или более) отдельных уравнения, каждое из которых однозначно определяет некоторые переменные

Решение (вариант 2, упрощение выражения):

1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$((\overline{M + L}) \cdot K) \to (\overline{K} \cdot \overline{M} + N) = 0$$
2) заменим импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:
$$\overline{((\overline{M + L}) \cdot K)} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$
3) раскроем инверсию сложного выражения по формуле де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:
$$M + L + \overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} + N = 0$$
4) упростим выражение $\overline{K} + \overline{K} \cdot \overline{M} = \overline{K}(1 + \overline{M}) = \overline{K}$:
$$M + L + \overline{K} + N = 0$$
5) мы получили уравнение вида «сумма = 0», в нем все слагаемые должны быть равны нулю
6) поэтому сразу находим $M = L = N = 0, \quad K = 1$
7) таким образом, правильный ответ – 1000.

Замечание:
- этот способ работает всегда и дает более общее решение; в частности, можно легко обнаружить, что уравнение имеет несколько решений (тогда оно не сведется к форме «сумма = 0» или «произведение = 1»)

Возможные проблемы:
- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

Еще пример задания:

Составьте таблицу истинности для логической функции

X = (A ↔ B) ∨ ¬(A → (B ∨ C))

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 27, столбец значений аргумента B – числа 77, столбец значений аргумента C – числа 120. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

Решение (вариант 1):

1) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \to (B + C))}$$

2) это выражение с тремя переменными, поэтому в таблице истинности будет 2^3=8 строчек; следовательно, двоичная запись чисел, по которым строятся столбцы таблицы A, B и C, должна состоять из 8 цифр
3) переведем числа 27, 77 и 120 в двоичную систему, сразу дополняя запись до 8 знаков нулями в начале чисел

   $27 = 00011011_2$ $77 = 01001101_2$ $120 = 01111000_2$
4) теперь можно составить таблицу истинности (см. рисунок справа), в которой строки переставлены в сравнении с традиционным порядком[1]; зеленым фоном выделена двоичная записи числа 27 (биты записываются сверху вниз), синим – запись числа 77 и розовым – запись числа 120:

A	*B*	*C*	*X*
0	0	0	
0	1	1	
0	0	1	
1	0	1	
1	1	1	
0	1	0	
1	0	0	
1	1	0	

5) вряд ли вы сможете сразу написать значения функции X для каждой комбинации, поэтому удобно добавить в таблицу дополнительные столбцы для расчета промежуточных результатов (см. таблицу ниже)
6) заполняем столбцы таблицы:

A	*B*	*C*	$A \leftrightarrow B$	$B+C$	$A \to (B+C)$	$\overline{A \to (B+C)}$	*X*
0	0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1

   значение $A \leftrightarrow B$ равно 1 только в тех строчках, где A = B

   значение $B+C$ равно 1 только в тех строчках, где B = 1 или C = 1

   значение $A \to (B+C)$ равно 0 только в тех строчках, где A = 1 и B + C = 0

   значение $\overline{A \to (B+C)}$ – это инверсия предыдущего столбца (0 заменяется на 1, а 1 – на 0)

   результат X (последний столбец) – это логическая сумма двух столбцов, выделенных фиолетовым фоном
7) чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз: $X = 10101011_2$
8) переводим это число в десятичную систему: $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
9) таким образом, правильный ответ – 171.

Возможные проблемы:
- нужно помнить таблицы истинности логических операций
- легко запутаться в многочисленных столбцах с однородными данными (нулями и единицами)

Решение (вариант 2, преобразование логической функции):
1) выполним пп. 1-5 так же, как и в предыдущем способе
2) запишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

[1] Проверьте, что обычно (когда комбинации располагаются по возрастанию соответствующих двоичных чисел), столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа $15 = 1111_2$, столбец значений аргумента B – числа $51 = 110011_2$, столбец значений аргумента C – числа $85 = 1010101_2$.

$$X = (A \leftrightarrow B) + \overline{(A \to (B+C))}$$

3) раскроем импликацию через операции И, ИЛИ и НЕ ($A \to B = \overline{A} + B$):

$$A \to (B+C) = \overline{A} + B + C$$

4) раскроем инверсию для выражения $A \to (B+C) = \overline{A} + B + C$ по формуле де Моргана:

$$\overline{A \to (B+C)} = \overline{\overline{A} + B + C} = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$$

5) таким образом, выражение приобретает вид $X = (A \leftrightarrow B) + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
6) отсюда сразу видно, что X = 1 только тогда, когда A = B или (A = 1 и B = C = 0):

A	*B*	*C*	*X*	*Примечание*
0	0	0	1	A = B
0	1	1	0	
0	0	1	1	A = B
1	0	1	0	
1	1	1	1	A = B
0	1	0	0	
1	0	0	1	A = 1, B = C = 0
1	1	0	1	A = B

7) чтобы получить ответ, выписываем биты из столбца X сверху вниз: $X = 10101011_2$
8) переводим это число в десятичную систему: $10101011_2 = 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 171$
9) таким образом, правильный ответ – 171.

Возможные проблемы:
- нужно помнить правила преобразования логических выражений и хорошо владеть этой техникой

Еще пример задания:

A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

¬ (A = B) ∧ ((A > B) → (B > C)) ∧ ((B > A) → (C > B))

Чему равно B, если A = 45 и C = 43?.

Решение (вариант 1):

1) обратим внимание, что это сложное высказывание состоит из трех простых

¬ (A = B)

(A > B) → (B > C)

(B > A) → (C > B)

2) эти простые высказывания связаны операцией ∧ (И, конъюнкция), то есть, они должны выполняться одновременно
3) из **¬ (A = B) =1** сразу следует, что **A ≠ B**
4) предположим, что **A > B**, тогда из второго условия получаем **1→ (B > C) =1**; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда **B > C = 1**
5) поэтому имеем **A > B > C**, этому условию соответствует только число 44
6) на всякий случай проверим и вариант **A < B**, тогда из второго условия получаем 0 → **(B > C) =1**; это выражение истинно при любом **B**;
теперь смотрим третье условие: получаем **1→ (C > B) =1**; это выражение может быть истинно тогда и только тогда, когда **C > B**, и тут мы получили противоречие, потому что нет такого числа B, для которого **C > B > A**

7) таким образом, правильный ответ – 44.

Решение (вариант 2, интутивный):

1) заметим, что между A и C расположено единственное число 44, поэтому можно предполагать, что именно это и есть ответ
2) проверим догадку, подставив в заданное выражение *A = 45, B = 44 и C = 43*

$$\neg(45 = 44) \land ((45 > 44) \rightarrow (44 > 43)) \land ((44 > 45) \rightarrow (43 > 44))$$

3) заменим истинные условия на 1, а ложные – на 0:

$$\neg(0) \land (1 \rightarrow 1) \land (0 \rightarrow 0)$$

4) вычисляем по таблице результаты операций $\neg$ (НЕ, отрицание) и $\rightarrow$ (импликация):

$$1 \land 1 \land 1$$

5) остается применить операцию $\land$ (И, конъюнкция) – получаем 1, то есть, выражение истинно, что нам и нужно
6) таким образом, правильный ответ – 44.

Возможные проблемы:

- не всегда удается сразу догадаться

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \land L \land M) \lor (\neg L \land \neg M \land N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (поиск неподходящих комбинаций):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$K \cdot L \cdot M + \overline{L} \cdot \overline{M} \cdot N = 0$$

2) здесь используется сложение двух логических произведений, которое равно 1 если одно из двух слагаемых истинно
3) поскольку произведения включают много переменных, можно предположить, что они равны 1 в небольшом числе случаев, поэтому мы попытаемся найти количество решений «обратного» уравнения

$$K \cdot L \cdot M + \overline{L} \cdot \overline{M} \cdot N = 1 \qquad (*)$$

а потом вычесть это число из общего количества комбинаций значений переменных K, L, M, N (для четырех логических переменных, принимающих два значения (0 или 1), существует 2^4=16 различных комбинаций)
4) уравнение $K \cdot L \cdot M = 1$ имеет два решения: требуется, чтобы $K = L = M = 1$, а N может принимать любые (логические) значения, то есть, 0 или 1; эти два решения – 1110 и 1111
5) уравнение $\overline{L} \cdot \overline{M} \cdot N = 1$ также имеет два решения: требуется, чтобы $L = M = 0$, $N = 1$, а K может быть равно 0 или 1; эти два решения – 0001 и 1001
6) среди полученных четырех решений нет одинаковых, поэтому уравнение (*) имеет 4 решения
7) это значит, что исходное уравнение истинно для всех остальных 16-4=12 комбинаций переменных K, L, M, N
8) таким образом, правильный ответ – 12.

Возможные проблемы:

- не всегда удается догадаться, что неверных комбинаций меньше
- нужно проверять, что среди найденных решений нет одинаковых

Еще пример задания:

Каково наибольшее целое положительное число **X**, *при котором истинно высказывание:*

(X·(X + 3) > X·X + 7) → (X·(X + 2) ≤ X·X + 11)

Решение (преобразование выражений):

1) несмотря на страшный вид, эта задача решается очень просто; сначала раскроем скобки в обеих частях импликации:

   (X·X + 3·X > X·X + 7) → (X·X + 2·X ≤ X·X + 11)

2) теперь в каждой части вычтем **X·X** из обеих частей неравенства:

   (3·X > 7) → (2·X ≤ 11)

3) в целых числах это равносильно:

   (X ≥ 3) → (X ≤ 5)

4) вспомним, как раскрывается импликация через операции ИЛИ и НЕ: $A \to B = \overline{A} + B$
5) учитывая, что $A = X \geq 3$, имеем $\overline{A} = X < 3$, следовательно

   (X < 3) *или* (X ≤ 5)

6) это равносильно высказыванию **(X ≤ 5)**
7) таким образом, ответ – 5.

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

¬((J→K)→(M∧N)) ∨ ¬((M∧N)→(¬J∨K)) ∨ (M∧N∧K∧L) = 0

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, упрощение выражения):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:

$$\overline{((J \to K) \to M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \to (\overline{J} + K))} + M \cdot N \cdot K \cdot L = 0$$

2) логическая сумма трех слагаемых равна нулю, поэтому каждое из них должно быть равно нулю
3) обозначим сумму двух первых слагаемых через S_{12} и попытаемся «свернуть» ее; для этого представим импликацию в виде $J \to K = \overline{J} + K$, тогда

$$S_{12} = \overline{((J \to K) \to M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \to (\overline{J} + K))} = \overline{((\overline{J} + K) \to M \cdot N)} + \overline{(M \cdot N \to (\overline{J} + K))}$$

4) выполним замены $A = \overline{J} + K$ и $B = M \cdot N$, тогда

$$S_{12} = \overline{(A \to B)} + \overline{(B \to A)}$$

5) раскроем импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» ($A \to B = \overline{A} + B$):

$$S_{12} = \overline{\overline{A} + B} + \overline{\overline{B} + A}$$

6) теперь применим формулу де Моргана $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$:

$$S_{12} = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}$$

7) заметим, что в третьем слагаемом $M \cdot N \cdot K \cdot L$ тоже есть сомножитель $B = M \cdot N$, поэтому уравнение можно переписать в виде

$$A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A} + B \cdot K \cdot L = 0$$

или

$$A \cdot \overline{B} + B \cdot (\overline{A} + K \cdot L) = 0$$

8) это равенство выполняется, тогда и только тогда, когда оба слагаемых равны нулю;
9) учитывая, что в первом слагаемом есть сомножитель $\overline{B}$, а во втором – B, это может быть в двух случаях:
    а) $B = 0,\ \ A = 0,\ \ L$ – любое (0 или 1)
    б) $B = 1,\ \ \overline{A} + K \cdot L = 0$
10) рассмотрим случай «а»: условию $B = M \cdot N = 0$ удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия $A = \overline{J} + K = 0$ сразу получаем, что $J = 1$ и $K = 0$; учитывая, что L – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;
11) в случае «б» условие $B = M \cdot N = 1$ сразу дает $M = N = 1$; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана:

$$\overline{A} + K \cdot L = \overline{\overline{J} + K} + K \cdot L = J \cdot \overline{K} + K \cdot L = 0$$

    это значит, что при $K = 0$ получаем $J = 0$ и L – любое (2 решения), а при $K = 1$ имеем $L = 0$ и J – любое (еще 2 решения)
12) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено 6 + 2 + 2 = 10 решений
13) ответ – 10.

Решение (вариант 2, использование свойств импликации):

1) выполнив шаги 1-4 из первого варианта решения, получим

$$S_{12} = \overline{(A \to B)} + \overline{(B \to A)}$$

    при заменах $A = \overline{J} + K$ и $B = M \cdot N$
2) поскольку нужно, чтобы $S_{12} = 0$, оба слагаемых равны нулю, то есть, обе импликации истинны: $A \to B = 1$ и $B \to A = 1$
3) отсюда по таблице истинности операции «импликация» находим, что это может быть в двух случаях:
    а) $B = 0,\ \ A = 0,\ \ L$ – любое (0 или 1)
    б) $B = 1,\ \ A = 1,\ \ \ K \cdot L = 0$
4) рассмотрим случай «а»: условию $B = M \cdot N = 0$ удовлетворяют 3 пары (M,N): (0,0), (0,1) и (1,0); из условия $A = \overline{J} + K = 0$ сразу получаем, что $J = 1$ и $K = 0$; учитывая, что L – любое (0 или 1), в случае «а» получаем 6 разных решений;
5) в случае «б» условие $B = M \cdot N = 1$ сразу дает $M = N = 1$; преобразуем второе условие с помощью формулы де Моргана и перепишем третье:

$$A = \overline{J} + K = 1,\ \ K \cdot L = 0$$

    это значит, что при $K = 0$ получаем $J = 0$ и L – любое (2 решения), а при $K = 1$ имеем $L = 0$ и J – любое (еще 2 решения)
6) проверяем, что все решения разные, поэтому всего найдено 6 + 2 + 2 = 10 решений
7) ответ – 10.

Возможные проблемы:

- это уравнение требует достаточно сложных преобразований; если вы не уверены в своих теоретических знаниях, лучше составить таблицу истинности (для 5 переменных в ней будет 32 строки) и аккуратно подставить все возможные комбинации переменных

- не всегда удается найти («увидеть») закономерности, позволяющие упростить выражение
- нужно проверять, чтобы среди найденных решений не было одинаковых

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \to K) \to (M \wedge N \wedge L)) \wedge ((M \wedge N \wedge L) \to (\neg J \vee K)) \wedge (M \to J) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, использование свойств импликации):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$\left[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L\right] \cdot \left[M \cdot N \cdot L \to (\overline{J} + K)\right] \cdot (M \to J) = 1$$
2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
3) учитывая, что $J \to K = \overline{J} + K$, и выполняя замены $A = \overline{J} + K$ и $B = M \cdot N \cdot L$, получаем
$$(A \to B) \cdot (B \to A) \cdot (M \to J) = 1.$$
4) рассмотрим последнюю импликацию, которая должна быть равна 1: $M \to J = 1$; по таблице истинности импликации сразу находим, что возможны три варианта:
   а) $M = J = 0$
   б) $M = 0, \ J = 1$
   в) $M = J = 1$
5) поскольку все (в том числе и первые две) импликации должны быть равны 1, по таблице истинности импликации сразу определяем, что $A = B$, то есть
$$\overline{J} + K = M \cdot N \cdot L$$
6) в случае «а» последнее уравнение превращается в $1 + K = 0$ и не имеет решений
7) в случае «б» имеем $K = 0$, тогда как N и L – произвольные; поэтому есть 4 решения, соответствующие четырем комбинациям N и L
8) в случае «в» получаем $K = N \cdot L$, то есть для $K = 1$ есть единственное решение ($N = L = 1$), а для $K = 0$ – три решения (при $N = L = 0$; $N = 1$ и $L = 0$; $N = 0$ и $L = 1$)
9) проверяем, что среди решений, полученных в п. 7 и 8 нет одинаковых
10) таким образом, всего есть 4 + 1 + 3 = 8 решений
11) ответ – 8

Решение (вариант 2, использование свойств импликации, А.М. Фридлянд, УГАТУ):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$\left[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L\right] \cdot \left[M \cdot N \cdot L \to (\overline{J} + K)\right] \cdot (M \to J) = 1$$
2) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
3) учитывая, что $J \to K = \overline{J} + K$, и выполняя замены $A = \overline{J} + K$ и $B = M \cdot N \cdot L$, получаем
$$(A \to B) \cdot (B \to A) \cdot (M \to J) = 1.$$
4) преобразуем первые две скобки:
$(A \to B) \cdot (B \to A) = \left(\overline{A} + B\right) \cdot \left(\overline{B} + A\right) = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \left(A \equiv B\right)$, где знак $\equiv$ означает операцию «эквивалентность». Так как это выражение должно быть истинным, значения A и B совпадают. Поэтому исходное уравнение распадается на 2 случая:

а) $\begin{cases} J \to K = 0 \\ M \cdot N \cdot L = 0 \\ M \to J = 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} J \to K = 1 \\ M \cdot N \cdot L = 1 \\ M \to J = 1 \end{cases}$

5) В случае *а*) из первого уравнения сразу получаем, что $\begin{cases} J = 1 \\ K = 0 \end{cases}$. Тогда третье уравнение справедливо при любом M, а второе имеет 7 решений (любое, кроме $M = N = L = 1$).
6) в случае *б*) из второго уравнения получаем: $M = N = L = 1$, но тогда из третьего уравнения следует, что $J = 1$ (иначе $M \to J = 1$), а тогда и $K = 1$ (иначе $J \to K = 0$).
7) таким образом, всего есть 7 + 1 = 8 решений
8) ответ – 8

Решение (вариант 3, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K)] \cdot (M \to J) = 1$$
2) идея заключается в том, что мы выбираем одну какую-нибудь переменную и отдельно рассматриваем случаи, когда она равна 0 и 1; такой подход, когда большая задача разбивается на несколько более простых, называют *декомпозицией*
3) логическое произведение трех сомножителей равно единице, поэтому каждый из них должен быть тоже равен единице
4) например, пусть $M = 0$; тогда требуется, чтобы $M \to J = 0 \to J = 1$, по таблице истинности импликации получается, что при этом J может быть любое («из лжи следует что угодно»);
   5) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты $J = 0$ и $J = 1$
   6) при $M = 0$ и $J = 0$ получаем
   $$[(0 \to K) \to 0] \cdot [0 \to 1] = 1$$
   это равенство истинно, если $0 \to K = 0$, а такого не может быть, то есть в этом случае решений нет
   7) при $M = 0$ и $J = 1$ получаем
   $$[(1 \to K) \to 0] \cdot [0 \to K] = 1$$
   это равенство истинно только при $K = 0$ (иначе первая скобка равна нулю), но у нас никак не ограничены значения L и N поэтому получается, что при $M = 0$ и $J = 1$ есть 4 решения (при $K = 0$ и всех 4-х различных комбинациях L и N)
8) теперь проверяем вариант, когда $M = 1$; при этом
$$[(J \to K) \to N \cdot L] \cdot [N \cdot L \to (\bar{J} + K)] \cdot (1 \to J) = 1$$
так как должно быть $1 \to J = 1$, по таблице истинности операции импликация сразу получаем $J = 1$ и уравнение преобразуется к виду
$$[(1 \to K) \to N \cdot L] \cdot [N \cdot L \to K] = 1$$
   9) выполним второй шаг декомпозиции: рассмотрим отдельно варианты $K = 0$ и $K = 1$
   10) при $K = 0$ получаем $[0 \to N \cdot L] \cdot [N \cdot L \to 0] = 1$, откуда сразу следует, что $N \cdot L = 0$ (3 решения: $N = L = 0$; $N = 1, L = 0$ и $N = 0, L = 1$)
   11) при $K = 1$ получаем $[1 \to N \cdot L] \cdot [N \cdot L \to 1] = 1$, откуда сразу следует, что $N \cdot L = 1$ (1 решение: $N = L = 1$)
12) таким образом, уравнение всего имеет 4+3+1 = 8 решений

13) ответ – 8

Решение (вариант 4, декомпозиция, автор идеи – А. Сидоров, ЭПИ МИСИС):

1) та же декомпозиция, но в другом порядке
2) сделаем сначала декомпозицию по J
3) рассмотрим вариант, когда $J = 0$; подставляя это значение в уравнение
$$[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K)] \cdot (M \to J) = 1$$
получаем
$$[(0 \to K) \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to 1] \cdot (M \to 0) = 1$$
4) учитывая, что $0 \to K = 1$ при любом K («из лжи следует все, что угодно»), находим
$$[1 \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to 1] \cdot (M \to 0) = 1$$
5) отсюда сразу следует, что $M \to 0 = 1$ и по таблице истинности операции импликация определяем, что $M = 0$; учитывая это, получаем
$$[1 \to 0] \cdot [0 \to 1] = 1$$
этого не может быть, потому что первая скобка равна нулю; поэтому при $J = 0$ решений нет
6) теперь пусть $J = 1$, тогда $\bar{J} + K = J \to K = 1 \to K = K$ и $M \to J = M \to 1 = 1$, поэтому остается уравнение
$$[K \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to K] = 1$$
7) выполним декомпозицию по переменной K
   8) при $K = 0$ получаем $[0 \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to 0] = 1$, что верно при условии $M \cdot N \cdot L = 0$; из всех 8-ми комбинаций значений переменных M, N и L только одна этому условию не удовлетворяет ($M = N = L = 1$), поэтому имеем 7 решений
   9) при $K = 1$ получаем $[1 \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to 1] = 1$, что верно при условии $M \cdot N \cdot L = 1$; из 8-ми комбинаций значений переменных M, N и L только одна ($M = N = L = 1$) удовлетворяет этому условию, поэтому имеем 1 решение
10) таким образом, уравнение всего имеет 7+1 = 8 решений
11) ответ – 8

Возможные проблемы:

- при использовании метода декомпозиции важен порядок выбора переменных для разбиения; можно рекомендовать в первую очередь делать декомпозицию по той переменной, которая чаще всего встречается в уравнении
- нужно помнить, что импликация равна нулю только в случае $1 \to 0$, часто именно это свойство позволяет упростить решение

Решение (вариант 5, комбинированный, Т.Н. Наумова, ХМАО, Пыть-Ях, МОУ СОШ №5):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L] \cdot [M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K)] \cdot (M \to J) = 1$$
2) имеем логическое произведение трех выражений, которое истинно тогда и только тогда, когда каждое выражение истинно; таким образом, нужно решить систему логических уравнений
$$(J \to K) \to M \cdot N \cdot L = 1, \qquad M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K) = 1, \qquad M \to J = 1$$
3) идея состоит в том, чтобы найти все решения одного из уравнений и проверить истинность остальных двух для всех полученных на предыдущем шаге комбинаций значений переменных
4) рассмотрим первое уравнение: $(J \to K) \to M \cdot N \cdot L = 1$; оно справедливо в двух случаях:

а) $J \to K = 0$, $M \cdot N \cdot L$ – любое, или $J = 1,\ K = 0,\ L = *,\ M = *,\ N = *$, где звездочка означает, что переменная может принимать значения 0 или 1; всего получается **8 вариантов**

б) $J \to K = 1$, $M \cdot N \cdot L = 1$, что дает ещё **три варианта**:
$J = 0,\ K = *,\ L = 1,\ M = 1,\ N = 1$ – два варианта
$J = 1,\ K = 1,\ L = 1,\ M = 1,\ N = 1$ – один вариант

5) остается проверить истинность второго ($M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K) = 1$) и третьего ($M \to J = 1$) равенств для этих 11 вариантов; сразу видим, что импликация $M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K)$ ложна только тогда, когда $M \cdot N \cdot L = 1,\ \ \bar{J} + K = 0$, то есть для комбинации (10111), а импликация $M \to J$ ложна для $M = 1,\ \ J = 0$ при любых значениях остальных переменных:

J	K	L	M	N	$M \cdot N \cdot L \to (\bar{J} + K) = 1$	$M \to J = 1$	
1	0	0	0	0	1	1	✓
1	0	0	0	1	1	1	✓
1	0	0	1	0	1	1	✓
1	0	0	1	1	1	1	✓
1	0	1	0	0	1	1	✓
1	0	1	0	1	1	1	✓
1	0	1	1	0	1	1	✓
1	0	1	1	1	0	1	
0	0	1	1	1	1	0	
0	1	1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	1	1	✓

6) таким образом, остается 8 вариантов, отмеченных галочками справа от таблицы

7) ответ – 8

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет уравнение

((J → K) → (M ∧ N ∧ L)) ∧ ((J ∧ ¬K) → ¬(M ∧ N ∧ L)) ∧ (M → J) = 1

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Решение (вариант 1, упрощение выражения):

1) перепишем уравнение, используя более простые обозначения операций:
$$\left[(J \to K) \to M \cdot N \cdot L\right] \cdot \left[(J \cdot \bar{K}) \to \overline{M \cdot N \cdot L}\right] \cdot (M \to J) = 1$$

2) попытаемся использовать замену переменных
$$A = J \to K = \bar{J} + K, \quad B = M \cdot N \cdot L$$

3) тогда $J \cdot \bar{K} = \overline{\bar{J} + K} = \overline{J \to K} = \bar{A}$

4) с учетом этих обозначений преобразуем исходное уравнение к виду:
$$(A \to B) \cdot (\bar{A} \to \bar{B}) \cdot (M \to J) = 1$$

5) раскрываем импликации по правилу $A \to B = \bar{A} + B$:
$$(\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B}) \cdot (\bar{M} + J) = 1$$

6) перемножаем первые две скобки, учитывая, что $A \cdot \bar{A} = B \cdot \bar{B} = 0$:

$$(\overline{A}\cdot\overline{B}+A\cdot B)\cdot(\overline{M}+J)=1$$

7) снова раскрываем скобки

$$\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{M}+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot J+A\cdot B\cdot\overline{M}+A\cdot B\cdot J=1$$

8) возвращаемся к исходным переменным, вспоминая, что $\overline{A}=J\cdot\overline{K}$

$$J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}\cdot\overline{M}+J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}\cdot J+(\overline{J}+K)\cdot M\cdot N\cdot L\cdot\overline{M}+(\overline{J}+K)\cdot M\cdot N\cdot L\cdot J=1$$

9) далее используем равенства $M\cdot\overline{M}=J\cdot\overline{J}=0$ и $J\cdot J=J$, два слагаемых обращаются в нуль:

$$J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}\cdot\overline{M}+J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}+K\cdot M\cdot N\cdot L\cdot J=1$$

10) выносим общий множитель из первых двух слагаемых, в скобках остается выражение $\overline{M}+1=1$

$$J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}\cdot(\overline{M}+1)+K\cdot M\cdot N\cdot L\cdot J=1$$

$$J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}+K\cdot M\cdot N\cdot L\cdot J=1$$

11) такие образом, уравнение разбивается на два:

$J\cdot\overline{K}\cdot\overline{M\cdot N\cdot L}=J\cdot\overline{K}\cdot(\overline{M}+\overline{N}+\overline{L})=1$ (*)

$K\cdot M\cdot N\cdot L\cdot J=1$ (**)

12) из уравнения $J\cdot\overline{K}\cdot(\overline{M}+\overline{N}+\overline{L})=1$ следует, что $J=1, K=0$ и хотя бы одна из переменных M,N,L не равна 1; поэтому уравнение (*) имеет 7 решений (за исключением случая $M=N=L=1$)

13) уравнение (**) имеет единственное решение $J=K=M=N=L=1$

14) среди решений уравнений (*) и (**) нет одинаковых (в первом случае $K=0$, а во втором - $K=1$), поэтому исходное уравнение имеет 7 + 1 = 8 решений.

15) ответ – 8.

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg X_1 \lor X_2 = 1$$

$$\neg X_2 \lor X_3 = 1$$

$$...$$

$$\neg X_9 \lor X_{10} = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (последовательное решение, через единицы):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу

2) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1}+X_2=1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно имеет 3 решения (точнее, с учетом других переменных, 3 группы решений): (0,0,*), (0,1,*) и (1,1,*); здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми

3) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:

(0,0,*)
(0,1,*)
(1,1,*)

4) заметим, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым
5) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже имеет 3 группы решений: (x_1,0,0,*), (x_1,0,1,*) и (x_1,1,1,*), где x_1, – некоторое логическое значение переменной X_1
6) решения системы первых двух уравнений – это те комбинации значений переменных, которые удовлетворяю одновременно и первому, и второму
7) из п. 4 следует, что при $X_2 = 0$ значение X_1 должно быть равно 0, а при $X_2 = 1$ значение X_1 может быть любым, поэтому решение системы двух первых уравнений включает 4 группы: из (x_1,0,0,*) и (x_1,0,1,*) при $X_1 = 0$ получаем две группы

   (0,0,0,*) и (0,0,1,*)

   и из (x_1,1,1,*) получается еще две:

   (0,1,1,*) и (1,1,1,*).
8) таким образом, система из двух уравнений имеет 4 решения
9) выпишем все решения в столбик, чтобы была видна закономерность:

   (0,0,0,*)
   (0,0,1,*)
   (0,1,1,*)
   (1,1,1,*)
10) таким образом, если $X_3 = 0$, все предыдущие переменные определяются однозначно – они должны быть равны нулю (идем по системе «снизу вверх»); если же $X_3 = 1$, то предыдущие переменные могут быть любыми, второе уравнение их не ограничивает
11) поэтому при увеличении числа переменных на единицу количество решений также увеличивается на единицу
12) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
13) таким образом, ответ: 11 решений.

Решение (последовательное решение, через нули):

1) сначала рассмотрим первое уравнение $\overline{X_1} + X_2 = 1$; согласно таблице истинности операции «ИЛИ» оно НЕ выполняется только в одном случае (точнее, с учетом других переменных, для одной группы комбинаций): (1,0,*) здесь звездочка означает, что остальные 8 переменных могут быть любыми
2) общее количество комбинаций X_1 и X_2 равно $2^2 = 4$, поэтому число решений первого уравнения равно 4 – 1 = 3
3) второе уравнение, рассматриваемое отдельно, тоже ложно только для одной комбинации имеет 3 группы решений: (x_1,1,0,*), где x_1, – некоторое логическое значение переменной X_1
4) теперь рассмотрим вместе первое и второе уравнения и определим, в скольких случаях хотя бы одно из них неверно
5) множества (1,0,x_3,*) и (x_1,1,0,*) не пересекаются, потому что в первом $X_2 = 0$, а во втором $X_2 = 1$, поэтому система из двух уравнений не выполнена для 4-х комбинаций:

   (1,0,0,*), (1,0,1,*), (0,1,0,*) и (1,1,0,*)
6) общее количество комбинаций трех логический переменных равно $2^3 = 8$, поэтому количество решений системы из двух уравнений равно 8 – 4 = 4
7) аналогично доказывается, что система из 3 уравнений имеет 5 решений, и т.д., то есть, система из 9 уравнений с 10 переменными имеет 11 решений
8) таким образом, ответ: 11 решений.

Решение (табличный метод):

1) рассмотрим все решения первого уравнения $\overline{X_1} + X_2 = 1$ по таблице истинности:

$\overline{X_1}+X_2=1$	**X$_2$**	**X$_1$**
1	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1

2) строчка, выделенная красным фоном, не удовлетворяет условию, поэтому дальше ее рассматривать не будем
3) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

X$_3$	**X$_2$**	**X$_1$**
?	0	0
?	1	0
?	1	1

4) при каких значениях переменной X_3 будет верно условие $\overline{X_2}+X_3=1$? Очевидно, что на это уже не влияет X_1 (этот столбец выделен зеленым цветом). Если $X_2 = 1$, то сразу получаем, что $X_3 = 1$ (иначе $\overline{X_2}+X_3=0+0=0$ **)**:

X$_3$	**X$_2$**	**X$_1$**
0	0	0
1	0	0
1	1	0
1	1	1

5) как видно из таблицы, верхняя строчка предыдущей таблицы (где были все нули) дает два решения при подключении очередного уравнения, а все остальные – по одному
6) понятно, что такая же ситуация будет продолжаться и дальше, то есть, при добавлении каждой новой переменной число решений увеличивается на 1
7) рассуждая таким образом и дальше, получаем, что для 3-х уравнений с 4-мя переменными будет 5 решений, для 4 уравнений – 6 решений, …, а для 9 уравнений – 11 решений
8) обратите внимание на форму таблицы – единицы и нули образуют два треугольника
9) таким образом, ответ: 11 решений.

Рекомендации:
- по-видимому, лучший способ решения задач этого типа основан на двух идеях:
  1) замена переменных (если она возможна), позволяющая сократить количество неизвестных и таким образом упростить решение
  2) последовательное решение уравнений, начиная с первого, затем система из первых двух, первых трех и т.д.
- для записи хода решения и минимизации путаницы лучше использовать табличный метод, при котором все переменные, от которых зависит очередное уравнение, размещены в крайних левых столбцах таблицы

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$\neg(X_1 \equiv X_2) \lor (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\neg(X_3 \equiv X_4) \lor (X_5 \equiv X_6) = 1$$
$$\neg(X_5 \equiv X_6) \lor (X_7 \equiv X_8) = 1$$
$$\neg(X_7 \equiv X_8) \lor (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) заметим, что при обозначениях $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$, $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$, $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$ и $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$ мы получаем систему из 4 уравнений и 5 независимыми переменными; эта система уравнений относится к типу, который рассмотрен в предыдущей разобранной задаче:

$$\neg Y_1 \lor Y_2 = 1$$
$$\neg Y_2 \lor Y_3 = 1$$
$$\neg Y_3 \lor Y_4 = 1$$
$$\neg Y_4 \lor Y_5 = 1$$

3) как следует из разбора предыдущей задачи, такая система имеет 5+1 = 6 решений для переменных Y_1 … Y_5
4) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных, X_1 … X_{10}; для этого заметим, что переменные Y_1 … Y_5 независимы;
5) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары (X_1;X_2) (как для случая Y_1 = 0, так и для случая Y_1 = 1)
6) у нас есть 5 переменных Y_1 … Y_5, каждая их комбинация дает 2 пары (X_1;X_2), 2 пары (X_3;X_4), 2 пары (X_5;X_6), 2 пары (X_7;X_8) и 2 пары (X_9;X_{10}), то есть всего 2^5 = 32 комбинации исходных переменных
7) таким образом, общее количество решений равно 6 · 32 = 192
8) ответ: 192 решения

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \land X_2) \lor (\neg X_1 \land \neg X_2) \lor (\neg X_3 \land X_4) \lor (X_3 \land \neg X_4) = 1$$
$$(X_3 \land X_4) \lor (\neg X_3 \land \neg X_4) \lor (\neg X_5 \land X_6) \lor (X_5 \land \neg X_6) = 1$$
$$(X_5 \land X_6) \lor (\neg X_5 \land \neg X_6) \lor (\neg X_7 \land X_8) \lor (X_7 \land \neg X_8) = 1$$
$$(X_7 \land X_8) \lor (\neg X_7 \land \neg X_8) \lor (\neg X_9 \land X_{10}) \lor (X_9 \land \neg X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
3) заметим, что

$$(X_1 \land X_2) \lor (\neg X_1 \land \neg X_2) = (X_1 \equiv X_2),$$

где символ ≡ означает операцию «эквивалентность» (значения равны);
4) кроме того,

$$(\neg X_3 \wedge X_4) \vee (X_3 \wedge \neg X_4) = (X_3 \oplus X_4) = \neg(X_3 \equiv X_4),$$

где символ ⊕ означает операцию «исключающее ИЛИ» (значения НЕ равны); это операция, обратная эквивалентности

5) используем замену переменных, выделив члены, объединяющие пары исходных переменных (X_1 и X_2, X_3 и X_4, X_5 и X_6, X_7 и X_8, X_9 и X_{10})

$$Y_1 = \neg(X_1 \equiv X_2) \qquad Y_2 = \neg(X_3 \equiv X_4)$$
$$Y_3 = \neg(X_5 \equiv X_6) \qquad Y_4 = \neg(X_7 \equiv X_8)$$
$$Y_5 = \neg(X_9 \equiv X_{10})$$

6) при этих обозначения система уравнений преобразуется к виду

$$\neg Y_1 \vee Y_2 = 1$$
$$\neg Y_2 \vee Y_3 = 1$$
$$\neg Y_3 \vee Y_4 = 1$$
$$\neg Y_4 \vee Y_5 = 1$$

9) как показано выше (при разборе пред-предыдущей задачи), такая система имеет 5+1 = 6 решений для независимых переменных Y_1 … Y_5

10) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = \overline{(X_1 \equiv X_2)}$, по таблице истинности операции «эквивалентность» есть **две** соответствующих пары (X_1;X_2) (как для случая Y_1 = 0, так и для случая Y_1 = 1)

11) у нас есть 5 переменных Y_1 … Y_5, каждая их комбинация дает 2 пары (X_1;X_2), 2 пары (X_3;X_4), 2 пары (X_5;X_6), 2 пары (X_7;X_8) и 2 пары (X_9;X_{10}), то есть всего 2^5 = 32 комбинации исходных переменных

12) таким образом, общее количество решений равно 6 · 32 = 192

7) ответ: 192 решения

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 1$$
$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 1$$
$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 1$$
$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение:

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) решать такую систему «в лоб» достаточно сложно, нужно попробовать ее упростить
3) рассмотрим первое уравнение, заменив обозначения логических операций на более простые:

$$Y_1 \cdot Y_2 + \overline{Y_1} \cdot \overline{Y_2} = 1,$$

где $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$ и $Y_2 = (X_3 \equiv X_4)$. Выражение в левой части последнего равенства – это операция эквивалентности между Y_1 и Y_2, то есть первое уравнение запишется в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$

4) аналогично, вводя обозначения $Y_3 = (X_5 \equiv X_6)$, $Y_4 = (X_7 \equiv X_8)$ и $Y_5 = (X_9 \equiv X_{10})$, запишем исходную систему в виде

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$
$$(Y_2 \equiv Y_3) = 1$$
$$(Y_3 \equiv Y_4) = 1$$
$$(Y_4 \equiv Y_5) = 1$$

заметим, что все переменные здесь независимы друг от друга

13) найдем решение этой системы относительно **независимых** переменных $Y_1 \ldots Y_5$
14) первое уравнение имеет два решения (с учетом остальных переменных – две группы решений): (0,0,*) и (1,1,*), где * обозначает остальные переменные, которые могут быть любыми
15) второе уравнение тоже имеет две группы решений: (x_1,0,0,*) и (x_1,1,1,*), где x_1 обозначает некоторое значение переменной x_1
16) теперь ищем решения, которые удовлетворяют и первому, и второму уравнению; очевидно, что их всего 2: (0,0,0,*) и (1,1,1,*)
17) рассуждая дальше аналогичным образом, приходим к выводу, что система имеет всего два решения относительно переменных $Y_1 \ldots Y_5$: все нули и все единицы
18) теперь нужно получить количество решений в исходных переменных, $X_1 \ldots X_{10}$; для этого вспомним, что переменные $Y_1 \ldots Y_5$ независимы;
19) предположим, что значение Y_1 известно (0 или 1); поскольку $Y_1 = (X_1 \equiv X_2)$, по таблице истинности операции «эквивалентность» (истина, когда два значения одинаковы), есть **две** соответствующих пары (X_1;X_2) (как для случая $Y_1 = 0$, так и для случая $Y_1 = 1$)
20) у нас есть 5 переменных $Y_1 \ldots Y_5$, каждая их комбинация дает 2 допустимых пары (X_1;X_2), 2 пары (X_3;X_4), 2 пары (X_5;X_6), 2 пары (X_7;X_8) и 2 пары (X_9;X_{10}), то есть всего $2^5 = 32$ комбинации исходных переменных
21) таким образом, общее количество решений равно $2 \cdot 32 = 64$
22) ответ: 64 решения

Решение (табличный метод):

1) так же, как и в предыдущем варианте, с помощью замену переменных сведем систему к виду:

$$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$$
$$(Y_2 \equiv Y_3) = 1$$
$$(Y_3 \equiv Y_4) = 1$$
$$(Y_4 \equiv Y_5) = 1$$

2) рассмотрим все решения первого уравнения $(Y_1 \equiv Y_2) = 1$ по таблице истинности:

$(Y_1 \equiv Y_2) = 1$	Y_2	Y_1
1	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

3) строчки, выделенные красным фоном, не удовлетворяют условию, поэтому дальше их рассматривать не будем
4) теперь подключаем третью переменную и второе уравнение:

Y_3	Y_2	Y_1
?	0	0
?	1	1

5) при каких значениях переменной X_3 будет верно условие $(Y_2 \equiv Y_3) = 1$? Очевидно, что на это уже не влияет Y_1 (этот столбец выделен зеленым цветом). Сразу получаем два решения:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	1	1

6) как видно из таблицы, каждая строчка предыдущей таблицы дает одно решение при подключении очередного уравнения, поэтому для любого количества переменных система имеет 2 решения – все нули и все единицы
7) так же, как и в предыдущем способе, переходим к исходным переменным и находим общее количество решений: $2 \cdot 32 = 64$
8) ответ: 64 решения

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_2 \equiv X_1) \lor (X_2 \land X_3) \lor (\neg X_2 \land \neg X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) \lor (X_3 \land X_4) \lor (\neg X_3 \land \neg X_4) = 1$$
$$...$$
$$(X_9 \equiv X_1) \lor (X_9 \land X_{10}) \lor (\neg X_9 \land \neg X_{10}) = 1$$
$$(X_{10} \equiv X_1) = 0$$

где $x_1, x_2, …, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$(X_2 \equiv X_1) + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$
$$...$$
$$(X_9 \equiv X_1) + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = (X_2 \equiv X_3)$, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_2 \equiv X_1) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_3 \equiv X_1) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$...$$
$$(X_9 \equiv X_1) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$
$$X_{10} \equiv X_1 = 0$$

4) первое уравнение выполняется, когда есть X_2 равно X_1 или X_3
5) по таблице истинности находим 6 вариантов (для удобства мы будем записывать сначала столбец для X_1, а потом для всех остальных в обратном порядке):

X_1	X_3	X_2

0	0	0
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	1

обратите внимание, что в каждой строчке в первых двух столбцах должно быть по крайней мере одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым)

6) добавим еще одно уравнение и еще одну переменную X_4:

X_1	X_4	X_3	X_2
0	?	0	0
0	?	1	0
0	?	1	1
1	?	0	0
1	?	0	1
1	?	1	1

7) чтобы «подключить» второе уравнение, нужно использовать то же самое правило: каждой строчке в первых двух столбцах должно быть, по крайней мере, одно значение, равное значению в третьем столбце (который выделен желтым); это значит, что в первой и последней строчках (где $X_1 = X_3$) значение X_4 может быть любое (0 или 1), а в остальных строчках – только строго определенное:

X_1	X_4	X_3	X_2
0	0	0	0
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

8) таким образом, количество решений при подключении очередного уравнения к системе возрастает на 2!

9) подключили X_5 – получили 10 решений, X_6 – получили 12 решений, X_7 – получили 14 решений, X_8 – получили 16 решений, X_9 – получили 18 решений, X_{10} – получили 20 решений.

10) остается одно последнее уравнение $(X_{10} \equiv X_1) = 0$, из которого следует, что X_{10} не равен X_1

11) из таблицы следует, что только в первой и последней строчках значения первой и последней переменных совпадают, то есть из полученных 20 решений нужно отбросить 2

12) таким образом, получается 20 – 2 = 18 решений

13) ответ: 18 решений

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$

$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$

$$\ldots$$

$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно 2^{10} = 1024, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций
$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$
3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$, поэтому уравнения можно переписать в виде
$$(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_8 \equiv X_9) + (X_8 \equiv X_{10}) = 1$$
4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные был независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом
5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных X_1 и X_2, и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_1 \equiv X_3) = 1$:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где $X_1 = X_2$, значения X_3 могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где $X_1 \neq X_2$, мы сразу получаем, что для выполнения первого равнения необходимо $X_1 = X_3$, то есть, эти две строчки дают по одному решению:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
1	0	1
0	1	0
0	1	1
1	1	1

7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах (X_2 и X_1) или не равны;
8) также заметим, что в новой таблице в самой верхней и самой нижней строках значения X_3 и X_2 равны, а в остальных не равны (их 4 штуки); поэтому на следующем шаге (при

подключении четвертой переменной и третьего уравнения) верхняя и нижняя строки дадут 2 варианта с равными X_4 и X_3, и 2 + 4 = 6 вариантов, где X_4 и X_3 не равны

9) в общем виде: если на шаге **i** в таблице решений есть

   n$_i$ строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и …

   m$_i$ строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны,

   то на следующем шаге будет столько же (**n**$_i$) строк с равными значения в двух самых последних столбцах и **n**$_i$**+m**$_i$ строк с неравными значениями

10) эту последовательность можно записать в виде таблицы (**i** – число задействованных переменных):

i	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	2	4	6
4	2	2+4=6	8
5	2	2+6=8	10
6	2	2+8=10	12
7	2	2+10=12	14
8	2	2+12=14	16
9	2	2+14=16	18
10	2	2+16=18	20

11) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно 2 + 18 = 20

12) ответ: 20 решений

Еще пример задания:

Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$
$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_9 \wedge X_{10}) \vee (\neg X_9 \wedge \neg X_{10}) = 1$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

Решение (табличный метод):

1) количество комбинаций 10 логических переменных равно $2^{10} = 1024$, поэтому вариант с построением полной таблицы истинности отпадает сразу
2) перепишем уравнения, используя более простые обозначения операций

$$X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} + X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} = 1$$
$$X_2 \cdot X_3 + \overline{X_2} \cdot \overline{X_3} + X_3 \cdot X_4 + \overline{X_3} \cdot \overline{X_4} = 1$$
$$\ldots$$
$$X_8 \cdot X_9 + \overline{X_8} \cdot \overline{X_9} + X_9 \cdot X_{10} + \overline{X_9} \cdot \overline{X_{10}} = 1$$

3) заметим, что по свойству операции эквивалентности $X_1 \cdot X_2 + \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} = (X_1 \equiv X_2)$, поэтому уравнения можно переписать в виде

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$

$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

4) сделать замену переменных так, чтобы новые переменные был независимы друг от друга, здесь довольно затруднительно, поэтому будем решать уравнения последовательно табличным методом
5) рассмотрим все возможные комбинации первых двух переменных X_1 и X_2, и сразу попытаемся для каждой из них подобрать значения третьей так, чтобы выполнялось первое уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$:

X_3	X_2	X_1
?	0	0
?	0	1
?	1	0
?	1	1

6) очевидно, что в первой и последней строчках таблицы, где $X_1 = X_2$, значения X_3 могут быть любыми, то есть каждая из этих строчек дает два решения; в то же время во второй и третьей строках, где $X_1 \neq X_2$, мы сразу получаем, что для выполнения первого равнения необходимо $X_2 = X_3$, то есть, эти две строчки дают по одному решению:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
1	0	0
0	0	1
1	1	0
0	1	1
1	1	1

7) заметим, что количество решений для каждой строчки исходной таблицы (с двумя переменными) определялось лишь тем, равны значения в двух последних столбцах (X_2 и X_1) или не равны;
8) переставим строки так, чтобы сверху стояли те строки, в которых $X_2 = X_3$:

X_3	X_2	X_1
0	0	0
0	0	1
1	1	0
1	1	1
1	0	0
0	1	1

9) также заметим, что в новой таблице в четырех строках значения $X_2 = X_3$, а в остальных 2-х эти переменные не равны;
10) поэтому на следующем шаге (при подключении четвертой переменной и третьего уравнения) 4 первые строки дадут по 2 варианта (всего 4·2=8) решений, из них 4 штуки с равными X_4 и X_3, и 4 варианта, где X_4 и X_3 не равны
11) две нижние строки, где $X_2 \neq X_3$, дадут 2 варианта, где X_4 и X_3 равны
12) в общем виде: если на шаге **i** в таблице решений есть

    $\mathbf{n_i}$ строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы равны, и …

    $\mathbf{m_i}$ строк, где значения в двух самых левых столбцах таблицы не равны,

    то на следующем шаге будет ($\mathbf{n_i+m_i}$) строк с равными значения в двух самых последних столбцах и $\mathbf{n_i}$ строк с неравными значениями

13) эту последовательность можно записать в виде таблицы (**i** – число задействованных переменных):

i	$X_i = X_{i-1}$	$X_i \neq X_{i-1}$	всего решений
3	4	2	6
4	4+2=6	4	10
5	6+4=10	6	16
6	10+6=16	10	26
7	16+10=26	16	42
8	26+16=42	26	68
9	42+26=68	42	110
10	68+42=110	68	178

14) таким образом, для системы с 10 переменными общее количество решений равно 110 + 68 = 178

15) ответ: 178 решений

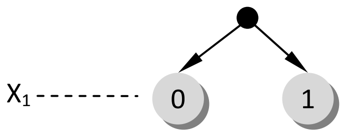
Решение (использование дерева для представления решения):

1) идея представления множества решений в виде дерева использовалась, например, в решениях **О.А. Тузовой** (Санкт-Петербург, школа № 550) и **М.В. Демидовой** (г. Пермь, гимназия №17); как верно отметила О.А. Тузова, предложенный выше табличный метод по сути представляет собой компактную запись дерева

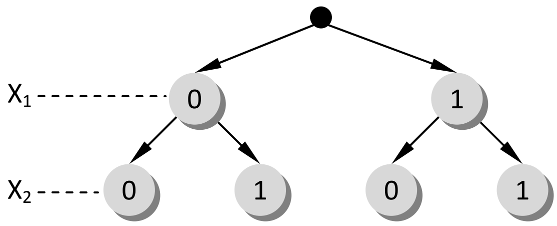
2) так же, как и в предыдущем варианте решения, перейдем к равносильной системе уравнений

$$(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \equiv X_3) + (X_3 \equiv X_4) = 1$$
$$\dots$$
$$(X_8 \equiv X_9) + (X_9 \equiv X_{10}) = 1$$

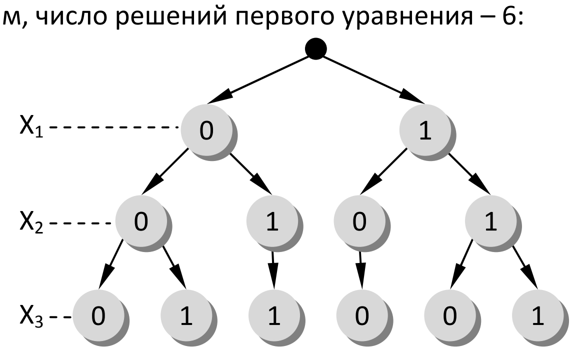
3) все переменные логические, в принятых обозначениях каждая из них может быть равна 1 или 0; для X_1 получаем два варианта, которые можно представить в виде



4) при этом X_2 может быть любым, то есть, имеем всего 4 варианта



5) теперь рассматриваем переменную X_3; если $X_1 = X_2$, то уравнение $(X_1 \equiv X_2) + (X_2 \equiv X_3) = 1$ выполняется при любом X_3; если $X_1 \neq X_2$, то это уравнение сразу дает $X_3 = X_2$; дерево получается уже неполным, число решений первого уравнения – 6:



6) рассуждая аналогично, находим, что на следующем шаге (подключение переменной X_4 и второго уравнения) получается 10 решений, затем – 16 и т.д.; в результате получается удвоенная последовательность Фибоначчи (2, 4, 6, 10, 16, 26, …), в которой каждый следующий элемент равен сумме двух предыдущих:

i	число решений
3	6
4	10
5	16
6	26
7	42
8	68
9	110
10	178

7) в некоторых вариантах такой подход рассматривался совместно с *методом декомпозиции*: сначала предполагаем, что $X_1 = 0$ и находим все решения для этого варианта; затем находим все решения при $X_1 = 1$; после этого общее количество решений вычисляется как сумма полученных двух чисел
8) ответ: 178 решений

Задачи для тренировки[2]:

1) Каково наибольшее целое число X, при котором истинно высказывание

$$(90 < X \cdot X) \rightarrow (X < (X-1))$$

2) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \vee (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

3) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg K \vee M) \rightarrow (\neg L \vee M \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

4) Каково наименьшее целое положительное число **X**, при котором высказывание:

$$(4 > -(4 + X) \cdot X) \rightarrow (30 > X \cdot X)$$

будет ложным.

5) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$((X - 1) < X) \rightarrow (40 > X \cdot X)$$

6) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg(M \vee L) \wedge K) \rightarrow ((\neg K \wedge \neg M) \vee N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

7) Каково наименьшее натуральное число X, при котором высказывание

$$\neg(X \cdot X < 9) \rightarrow (X > (X + 2))$$

будет ложным?

8) Укажите значения логических переменных P, Q, S, T, при которых логическое выражение

$$(P \vee \neg Q) \vee (Q \rightarrow (S \vee T))$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных P, Q, S, T (в указанном порядке).

9) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором высказывание:

$$((X + 6) \cdot X + 9 > 0) \rightarrow (X \cdot X > 20)$$

будет ложным?

10) Составьте таблицу истинности для логической функции

---

[2] Источники заданий:

1. Демонстрационные варианты ЕГЭ 2004-2011 гг.
2. Гусева И.Ю. ЕГЭ. Информатика: раздаточный материал тренировочных тестов. — СПб: Тригон, 2009.
3. Якушкин П.А., Крылов С.С. ЕГЭ-2010. Информатика: сборник экзаменационных заданий. – М.: Эксмо, 2009.
4. Якушкин П.А., Лещинер В.Р., Кириенко Д.П. ЕГЭ 2010. Информатика. Типовые тестовые задания. — М.: Экзамен, 2010.
5. Крылов С.С., Ушаков Д.М. ЕГЭ 2010. Информатика. Тематическая рабочая тетрадь. — М.: Экзамен, 2010.
6. Якушкин П.А., Ушаков Д.М. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010. Информатика. — М.: Астрель, 2009.
7. М.Э. Абрамян, С.С. Михалкович, Я.М. Русанова, М.И. Чердынцева. Информатика. ЕГЭ шаг за шагом. – М.: НИИ школьных технологий, 2010.
8. Самылкина Н.Н., Островская Е.М. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
9. Крылов С.С., Лещинер В.Р., Якушкин П.А. ЕГЭ 2011. Информатика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-центр, 2011.
10. Чуркина Т.Е. ЕГЭ 2011. Информатика. Тематические тренировочные задания. — М.: Эксмо, 2010.
11. Диагностические работы МИОО.

$$X = (A \rightarrow B) \wedge (C \leftrightarrow \neg(B \vee A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 226, столбец значений аргумента B – числа 154, столбец значений аргумента C – числа 75. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

11) Составьте таблицу истинности для логической функции

$$X = \neg(A \rightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow \neg(C \rightarrow A))$$

в которой столбец значений аргумента A представляет собой двоичную запись числа 216, столбец значений аргумента B – числа 30, столбец значений аргумента C – числа 170. Число в столбце записывается сверху вниз от старшего разряда к младшему. Переведите полученную двоичную запись значений функции X в десятичную систему счисления.

12) Известно, что для чисел X, Y и Z истинно высказывание

$$(Z < X \vee Z < Y) \wedge \neg(Z+1 < X) \wedge \neg(Z+1 < Y)$$

Чему равно Z, если X=25 и Y=48?

13) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \vee (L \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

14) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow M) \wedge (K \rightarrow \neg M) \wedge (\neg K \rightarrow (M \wedge \neg L \wedge N))$$

истинно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

15) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание:

$$(C<A \vee C<B) \wedge \neg(C+1 < A) \wedge \neg(C+1 < B)$$

Чему равно **C**, если **A=45** и **B=18**?

16) Сколько различных решений имеет уравнение

$$J \wedge \neg K \wedge L \wedge \neg M \wedge (N \vee \neg N) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

17) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \wedge ((B < A) \rightarrow (2C > A)) \wedge ((A < B) \rightarrow (A > 2C))$$

Чему равно A, если C = 8 и B = 18?.

18) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L) \vee (M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

19) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot X - 1 > 100) \rightarrow (X \cdot (X-1) < 100)$$

20) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором ложно высказывание:

$$(8 \cdot X - 6 < 75) \rightarrow (X \cdot (X-1) > 65)$$

21) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором ложно высказывание:

$$(X\cdot(X+1) > 55) \rightarrow (X\cdot X > 50)$$

22) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X\cdot(X+1) > X\cdot X + 7) \rightarrow (X\cdot(X+1) \le X\cdot X + 7)$$

23) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L \vee M) \wedge (\neg L \wedge \neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

24) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \wedge L \wedge M) \rightarrow (\neg M \wedge N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

25) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(K \vee L)\wedge(M \vee N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

26) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((A \rightarrow B)\wedge C) \vee (D \wedge \neg D) = 1,$$

где A, B, C, D – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений A, B, C, D, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать количество таких наборов.

27) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором ложно высказывание:

$$(X\cdot(X+1) > 55) \rightarrow (X\cdot X > 50)$$

28) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X\cdot(X+1) > X\cdot X+7) \rightarrow (X\cdot(X+1) \le X\cdot X+7)$$

29) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X\cdot X - 7 > 15) \rightarrow (X\cdot X + 8 < 35)$$

30) Каково наибольшее целое положительное число **X**, при котором ложно высказывание:

$$(9\cdot X + 5 > 60) \rightarrow (X\cdot X > 80)$$

31) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg M \wedge K \wedge \neg N \wedge \neg J \wedge (L \vee \neg L) = 0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

32) Каково наибольшее целое число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X\cdot X - 1 > 100) \rightarrow (X\cdot(X-1) < 100)$$

33) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(K \rightarrow \neg M) \vee (\neg L \wedge M \wedge K) \vee \neg N$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

34) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(\neg K \vee \neg L \vee \neg M) \wedge (L \vee \neg M \vee \neg N) = 0$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

35) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \to K) \to (M \land N)) \land ((J \land \neg K) \to (\neg M \lor \neg N)) \land (\neg M \lor \neg N \lor K \lor L)=1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

36) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((J \lor K \lor L) \to \neg(M \to N)) \land ((\neg J \land \neg K \land \neg L) \to (\neg M \lor N)) \land (M \lor \neg N \lor K)=1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

37) Сколько различных решений имеет уравнение

$$\neg((J \to K) \to (L \land M \land N)) \lor \neg((L \land M \land N) \to (\neg J + K)) \lor (M \land J)=0$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

38) Укажите значения переменных K, L, M, N, при которых логическое выражение

$$(\neg(M \lor L) \land K) \to ((\neg K \land \neg M) \lor N)$$

ложно. Ответ запишите в виде строки из четырех символов: значений переменных K, L, M и N (в указанном порядке). Так, например, строка 1101 соответствует тому, что K=1, L=1, M=0, N=1.

39) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((K \land \neg L \land \neg N) \to (\neg L \to M)) \lor ((\neg K \lor L \lor N) \to (\neg L \land \neg M))) \land (K \lor N) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

40) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(((\neg K \to M) \to (M \land \neg L \land \neg N)) \lor ((\neg K \land \neg M) \to (\neg M \lor L \lor N))) \land (L \land M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

41) A, B и C – целые числа, для которых истинно высказывание

$$\neg(A = B) \land ((A > B) \to (C = B)) \land ((B > A) \to (C = A))$$

Чему равно B, если A = 45 и C = 18?.

42) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \lor Y \lor Z) \to (X \land P) = 1$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

43) Каково наименьшее целое положительное число **X**, при котором ложно высказывание:

$$(82 < X \cdot X) \to (81 > (X-1) \cdot (X-1))$$

44) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(X \wedge Y \vee Z) \rightarrow (Z \vee P) = 0$$

где X, Y, Z, P – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

45) Каково наименьшее натуральное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) < 50) \rightarrow (X \cdot X > 35)$$

46) Каково наибольшее натуральное число **X**, при котором истинно высказывание:

$$(X \cdot (X+1) > 99) \rightarrow (X \cdot X < 65)$$

47) Сколько существует целых значений **X**, при которых ложно высказывание:

$$(|X| \geq 5) \vee (|X| < 1)$$

48) Сколько существует целых значений **X**, при которых ложно высказывание:

$$\neg((|X| < 5) \wedge (|X| < 1) \wedge (|X| < 10))$$

49) Сколько существует целых значений **X**, при которых ложно высказывание:

$$((X-4) \cdot (X-6) \geq 0) \rightarrow (X \cdot X - 12 \cdot X + 35 > 0)$$

50) Сколько различных решений имеет уравнение

$$((K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \rightarrow K) \wedge \neg(L \rightarrow M) = 1$$

где K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

51) Сколько различных решений имеет уравнение

$$(J \rightarrow L) \wedge (K \rightarrow L) \wedge (M \rightarrow \neg N) \wedge (L \rightarrow M) \wedge (M \rightarrow K) = 1$$

где J, K, L, M, N – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений J, K, L, M и N, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа вам нужно указать только количество таких наборов.

52) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$((X_1 \equiv X_2) \wedge (X_3 \equiv X_4)) \vee (\neg(X_1 \equiv X_2) \wedge \neg(X_3 \equiv X_4)) = 0$$
$$((X_3 \equiv X_4) \wedge (X_5 \equiv X_6)) \vee (\neg(X_3 \equiv X_4) \wedge \neg(X_5 \equiv X_6)) = 0$$
$$((X_5 \equiv X_6) \wedge (X_7 \equiv X_8)) \vee (\neg(X_5 \equiv X_6) \wedge \neg(X_7 \equiv X_8)) = 0$$
$$((X_7 \equiv X_8) \wedge (X_9 \equiv X_{10})) \vee (\neg(X_7 \equiv X_8) \wedge \neg(X_9 \equiv X_{10})) = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

53) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_1 \equiv X_3) = 1$$
$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_2 \equiv X_4) = 1$$
$$\ldots$$
$$(X_7 \wedge X_8) \vee (\neg X_7 \wedge \neg X_8) \vee (X_7 \equiv X_9) = 1$$
$$(X_8 \wedge X_9) \vee (\neg X_8 \wedge \neg X_9) \vee (X_8 \equiv X_{10}) = 0$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

54) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) = 1$$
$$(X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee (\neg X_3 \wedge \neg X_4) = 1$$

$$. . .$$

$$(x_8 \wedge x_9) \vee (\neg x_8 \wedge \neg x_9) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.

55) Сколько различных решений имеет система уравнений

$$(x_1 \equiv x_2) \vee (x_1 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_1 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

$$(x_2 \equiv x_3) \vee (x_2 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_2 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

$$. . .$$

$$(x_9 \equiv x_{10}) \vee (x_9 \wedge x_{10}) \vee (\neg x_9 \wedge \neg x_{10}) = 1$$

$$(x_1 \equiv x_{10}) = 0$$

где x_1, x_2, …, x_{10} – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.